

میدان الکتروستاتیک در محیط‌های دی‌الکتریک

که در آن $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = P_n$ (۴-۴)

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (۵-۴)$$

دو تابع نرده‌ای هستند که از بردار قطبش $\vec{P}$ نتیجه می‌شوند، چگالی‌های قطبشی نامیده می‌شوند. σ_p چگالی سطحی بار قطبشی است که دارای بُعد بار الکتریکی در واحد سطح است و از آن مؤلفه قطبش به دست می‌آید که بر سطح عمود است. ρ_p چگالی حجمی بار قطبشی است که دارای بُعد بار الکتریکی در واحد حجم است و از نایکنواختی قطبش در داخل ماده ناشی می‌شود. در واقع مقدار کل بار قطبشی یک جسم دی‌الکتریک به صورت زیر است:

$$Q_p = \int_{V_0} (-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}) dV' + \oint_{S_0} \vec{P} \cdot \hat{n} da' \quad (۶-۴)$$

با توجه به قانون دیورژانس $Q_p = 0$ می‌شود که با فرض اولیه ما که دی‌الکتریک از لحاظ الکتریکی خنثاست، در تطابق است.

میدان الکتریکی $\vec{E}$ را می‌توان از روی منفی گرادیان معادله (۳-۴) بدست آورد:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_{S_0} \sigma_p \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da' + \int_{V_0} \rho_p \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \right] \quad (۷-۴)$$

میدان الکتریکی در داخل یک دی‌الکتریک

معادله (۳-۴)، اعم از اینکه نقطه r در داخل دی‌الکتریک واقع باشد و یا در خارج آن، پتانسیل $\varphi(r)$ را به دست می‌دهد و همچنین معادله (۷-۴)، خواه $\vec{r}$ در داخل دی‌الکتریک باشد یا در خارج آن، میدان الکتریکی ناشی از محیط را در نقطه $\vec{r}$ تعیین می‌کند.

قانون گاوس در دی‌الکتریکها: جابه‌جایی الکتریکی

قانون گاوس برای ناحیه‌ای که دارای بارهای جاداده شده در دی‌الکتریک است، به صورت زیر است:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_p) \quad (۸-۴)$$

که Q_p ، بار قطبشی در سطح S است و Q مقدار باری که جاداده شده در سطح گاوسی مفروض است.

دی‌الکتریک کامل ماده‌ای است که بار آزاد نداشته باشد ولی در هر صورت مولکولهای آن یقیناً تحت تأثیر میدان‌های الکتریکی قرار می‌گیرند. به گونه‌ای که قسمتهای مثبت و منفی هر مولکول از مواضع حالت تعادل خود خارج و در دو جهت مخالف جابه‌جا می‌شوند. تأثیر کلی از لحاظ ماکروسکوپی را می‌توان این طور تجسم کرد که تمامی بار مثبت دی‌الکتریک نسبت به بار منفی آن جابه‌جا شده است، در این حالت گفته می‌شود دی‌الکتریک قطبیده شده است. دی‌الکتریک قطبیده با وجود اینکه به طور متوسط خنثاست، ولی در نقاط داخل و خارج خود میدان الکتریکی تولید می‌کند. در واقع قطبش دی‌الکتریک به میدان الکتریکی کل موجود در محیط بستگی دارد، در حالی که قسمتی از این میدان به وسیله خود دی‌الکتریک ایجاد می‌شود.

قطبش

رفتار الکتروستاتیکی یک محیط دی‌الکتریک به کمک گشتاور دوقطبی در واحد حجم، یا قطبش آن مشخص می‌شود:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta V} \quad (۱-۴)$$

ابعاد $\vec{P}$ ، بار بر واحد سطح و یکای آن در دستگاه mks ، کولن بر مترمربع است.

$\vec{P}(x, y, z)$ کمیتی برداری است که در هر جزء حجم، با $\Delta \vec{P}$ هم‌جهت است که $\Delta \vec{P}$ با جهت جابه‌جایی بار مثبت نسبت به بار منفی، هم‌جهت است.

گشتاور دوقطبی الکتریکی یک تک مولکول، $\vec{P}_m$ ، به صورت زیر است:

$$\vec{P}_m = \int_{\text{مولکول}} \vec{r} dq \quad (۲-۴)$$

بدان خارجی یک محیط دی‌الکتریک

انسیل ناشی از قطعه‌ای متناهی از یک ماده دی‌الکتریک قطبیده، در هر نقطه r' با قطبش $P(r')$ مشخص می‌شود، به صورت زیر:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_{S_0} \frac{\sigma_p da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{V_0} \frac{\rho_p dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \quad (۳-۱)$$

در واقع میدان الکتریکی در مقایسه با حالتی که محیط دی الکتریک وجود ندارد، به نسبت ضریب ϵ کوچک می شود.

شرایط مرزی حاکم بر بردارهای میدان

بردارهای میدان $\vec{E}$ و $\vec{D}$ در عبور از فصل مشترک دو محیط به صورت زیر تغییر می کنند:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (20-4)$$

در واقع ناپیوستگی مؤلفه عمود $\vec{D}$ با چگالی سطحی بار خارجی در روی فصل مشترک مشخص می شود به عبارت دیگر، اگر باری بر روی فصل مشترک بین دو محیط وجود نداشته باشد، مؤلفه عمود $\vec{D}$ پیوسته است.

مؤلفه مماسی میدان الکتریکی در عبور از فصل مشترک پیوسته است:

$$E_{2t} = E_{1t} \quad (21-4)$$

و بنابه دلایل فیزیکی محض، پتانسیل ϕ در عبور از فصل مشترک دو محیط باید پیوسته باشد.

نکته: شار $\vec{D}$ در ناحیه هایی از فضا که در آن بار خارجی وجود ندارد، پیوسته است.

$$\oint \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q \quad (22-4)$$

بنابراین خطوط جابه جایی به بارهای خارجی منتهی می شود. ولی خطوط نیرو یا به بارهای خارجی ختم می شوند و یا به بارهای قطبی.

مسائل مربوط به مقادیر مرزی در دی الکتریکها

اگر دی الکتریکهای که با آنها سروکار داریم، خطی، همسانگرد و همگن باشند، آنگاه شکل دیفرانسیلی قانون گاوس به صورت زیر در می آید:

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (23-4)$$

و با استفاده از $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$ برای میدان الکتروستاتیکی، معادله پواسون برای پتانسیل در دی الکتریک حاصل می شود:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (24-4)$$

تفاوت بین این رابطه و معادله پواسون در خلاء:

$\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ (خلاء)
 (چگالی بار خارجی) $\rho \rightarrow \rho$ (کل بار)
 در بیشتر موارد، دی الکتریک شامل باری که در حجم آن توزیع شده باشد، نیست، یعنی $\rho = 0$. در واقع بارها بر سطوح رساناها قرار دارند و یا به صورت بارهای نقطه ای در داخل دی الکتریک جا داده شده اند. تحت این شرایط، در سراسر حجم دی الکتریک، پتانسیل در معادله لاپلاس صدق می کند:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (25-4)$$

روش تصویری برای مسائل شامل دی الکتریکها:

همانطور که در فصل (۳) بیان شد، پتانسیل در ناحیه ای از فضا توسط پتانسیل بارهای نقطه ای و رساناهای باردار شده داخل ناحیه و توسط بارهای تصویری فرضی بیرون ناحیه تولید می شود. بارهای

اگر Q_p را بر حسب بردار قطبش به صورت زیر بنویسیم:

$$Q_p = -\oint \vec{P} \cdot \hat{n} da \quad (9-4)$$

می توان قانون گاوس را به شکل زیر بیان کرد:

$$\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \hat{n} da = Q \quad (10-4)$$

که Q فقط مقدار بار جاداده شده در دی الکتریک است. و با استفاده از بردار میدان ماکروسکوپی $\vec{D}$ (جابه جایی الکتریکی):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (11-4)$$

قانون گاوس به صورت زیر بیان می شود:

$$\oint \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q \quad (12-4)$$

و صورت دیفرانسیلی قانون گاوس با استفاده از این بردار $\vec{D}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (13-4)$$

پذیرفتاری الکتریکی و ثابت دی الکتریک

درجه قطبش یک ماده دی الکتریک نه تنها به میدان الکتریکی، بلکه به خواص مولکولهای سازنده آن بستگی دارد. از لحاظ ماکروسکوپی، رفتار ماده با یک رابطه تجربی به نام معادله ساختمندی، $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ مشخص می شود. این رابطه یک رابطه نقطه ای است و اگر $\vec{E}$ در ماده در نقطه ای به نقطه دیگر تغییر کند، $\vec{P}$ هم به تبعیت از آن تغییر می کند. اگر ماده همسانگرد باشد، قطبش باید همان جهتی را داشته باشد که میدان الکتریکی مواد آن دارد:

$$\vec{P} = \chi(\vec{E}) \vec{E} \quad (14-4)$$

که کمیت نرده ای $\chi(\vec{E})$ پذیرفتاری الکتریکی ماده نام دارد.

بنابراین بردار $\vec{D}$ در یک محیط همسانگرد به صورت زیر است:

$$\vec{D} = \epsilon(\vec{E}) \vec{E} \quad (15-4)$$

که $\epsilon(\vec{E})$ ، گذردهی ماده نامیده می شود:

$$(16-4)$$

در دی الکتریکهای خطی، χ و ϵ ثابتهای مشخصه ماده هستند، در واقع از روابط زیر تبعیت می کنند:

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \quad (17-4)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (18-4)$$

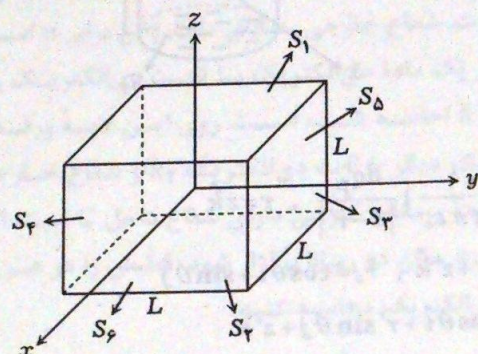
اگر میدان الکتریکی در یک دی الکتریک را خیلی قوی کنیم، این میدان الکترونها را به طور کامل از مولکولها بیرون می کشد و ماده به رسانا تبدیل می شود. حداکثر میدان الکتریکی که یک دی الکتریک می تواند تحمل کند بی آنکه در هم بشکند، استقامت دی الکتریک E_{max} نامیده می شود.

میدان الکتریکی بار نقطه ای در یک شاره دی الکتریک

بار نقطه ای q در یک شاره دی الکتریک با ثابت دی الکتریک در مبدأ مختصات قرار داشته باشد، با استفاده از قانون گاوس، میدان الکتریکی $\vec{E}$ و قطبش به صورت زیر بدست می آید:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi k \epsilon_0 r^2} \vec{r}, \quad \vec{P} = \frac{(k-1)q}{4\pi k r^2} \vec{r} \quad (19-4)$$

۲-۴- یک مکعب دی‌الکتریک به ضلع L دارای قطبشی شعاعی به صورت $\vec{P} = A\vec{r}$ است، که در آن A یک ضریب ثابت و $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ است. مبدأ مختصات در مرکز مکعب است. (الف) همه چگالیهای بار قطبشی را محاسبه کنید و (ب) صریحاً نشان دهید که بار قطبشی کل صفر است. (حل: الف)



$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot (A\vec{r}) = -A\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = -3A$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{P_1} = \vec{P} \cdot \hat{n}_1 \Big|_{z=L} = A\vec{r} \cdot \hat{k} \Big|_{z=L} = AL \\ \sigma_{P_2} = \vec{P} \cdot \hat{n}_2 \Big|_{z=-L} = A\vec{r} \cdot \hat{k} \Big|_{z=-L} = -AL \\ \sigma_{P_3} = \vec{P} \cdot \hat{n}_3 \Big|_{y=L} = A\vec{r} \cdot \hat{j} \Big|_{y=L} = AL \\ \sigma_{P_4} = \vec{P} \cdot \hat{n}_4 \Big|_{y=-L} = A\vec{r} \cdot \hat{j} \Big|_{y=-L} = -AL \\ \sigma_{P_5} = \vec{P} \cdot \hat{n}_5 \Big|_{x=L} = A\vec{r} \cdot \hat{i} \Big|_{x=L} = AL \\ \sigma_{P_6} = \vec{P} \cdot \hat{n}_6 \Big|_{x=-L} = A\vec{r} \cdot \hat{i} \Big|_{x=-L} = -AL \end{cases}$$

(ب)

$$dQ_p = \sigma_p da + \rho_p dV \Rightarrow Q_p = \int \sigma_p da + \int \rho_p dV$$

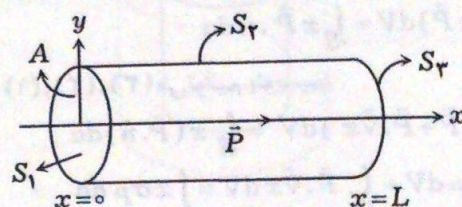
$$Q_p = \left(\frac{AL}{\cancel{y}}\right)(6L^2) + (-3A)(L^3) = 3AL^3 - 3AL^3 = 0$$

۳-۴- میله دی‌الکتریک استوانه‌ای شکل قائمی به طول L و به شعاع R در امتداد طولش قطبیده شده است. اگر قطبش یکنواخت و بزرگی آن P باشد، میدان الکتريکی ناشی از این قطبش را در نقطه‌ای بر روی محور میله حساب کنید.

تصویری به نظر می‌آید داخل یک یا چند رسانا قرار گرفته‌اند. ولی وقتی دو یا چند دی‌الکتریک موجود باشد، می‌توان بارهای تصویری خیالی را داخل یکی از دی‌الکتریکهای دیگر (نه آنکه پتانسیل برای آن محاسبه می‌شود) در نظر گرفت و شرایط مرزی در هر فصل مشترک دی‌الکتریک - دی‌الکتریک باید ارضا شود.

مسائل فصل چهارم

۱-۴- یک میله دی‌الکتریک باریک که سطح مقطع آن A است. روی محور x از $x=0$ تا $x=L$ قرار دارد. قطبش میله در امتداد طول آن با رابطه $P_x = ax^2 + b$ داده می‌شود. (الف) چگالی حجمی بار قطبش و چگالی سطحی بار قطبشی را در هر یک از دو سر میله حساب کنید. (ب) صریحاً نشان دهید که بار قطبش کل در این حالت صفر است. (حل: الف)



$$\vec{P} = P_x \hat{i} = (ax^2 + b) \hat{i}$$

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -2ax$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{P_1} = \vec{P} \cdot \hat{n}_1 \Big|_{x=0} = \vec{P} \cdot (-\hat{i}) \Big|_{x=0} = -(ax^2 + b) \Big|_{x=0} = -b \\ \sigma_{P_2} = \vec{P} \cdot \hat{n}_2 \Big|_{x=L} = \vec{P} \cdot (\hat{i}) \Big|_{x=L} = ax^2 + b \Big|_{x=L} = aL^2 + b \\ \sigma_{P_3} = \vec{P} \cdot \hat{n}_3 = \vec{P} \cdot \hat{r} = 0 \end{cases}$$

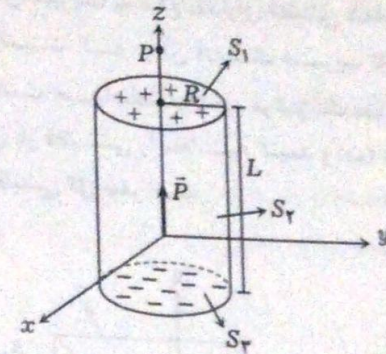
(ب)

$$dQ_p = \sigma_p da + \rho_p dV \Rightarrow Q_p = \int \sigma_p da + \int \rho_p dV$$

$$Q_p = \int \sigma_{P_1} da_1 + \int \sigma_{P_2} da_2 + \int \sigma_{P_3} da_3 + \int \rho_p dV$$

$$= -bA + (aL^2 + b)A + \int_{x=0}^{x=L} (-2ax) A dx$$

$$= aL^2 A + (-2aA \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=L}) = aL^2 A - aL^2 A = 0$$



$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'_P}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad r = z\hat{k},$$

$$\vec{r}' = r'\hat{r}_0 + z'\hat{k}, \quad \hat{r}_0 = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\vec{r}' = r' \cos\theta\hat{i} + r' \sin\theta\hat{j} + z'\hat{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \left[r'^2 + (z - z')^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$dq'_P = \sigma'_P da + \rho'_P dV$$

$$\vec{P} = P\hat{k} \Rightarrow \rho'_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$$

$$\sigma'_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\sigma'_P = \vec{P} \cdot \hat{n}_1 \Big|_{z=\frac{L}{2}} = P$$

$$\sigma'_P = \vec{P} \cdot \hat{n}_2 = 0$$

$$\sigma'_P = \vec{P} \cdot \hat{n}_3 \Big|_{z=-\frac{L}{2}} = -P$$

بنابراین پتانسیل به صورت زیر است:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma'_P da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{S_1} \frac{P da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{S_3} \frac{-P da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

$$= \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r' dr' d\theta'}{\left[r'^2 + (z - \frac{L}{2})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r' dr' d\theta'}{\left[r'^2 + (z + \frac{L}{2})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$= \frac{P}{4\pi\epsilon_0} (2\pi) \left[\left(r'^2 + (z - \frac{L}{2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^R - \left(r'^2 + (z + \frac{L}{2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^R \right]$$

$$= \frac{P}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2} - \sqrt{(z - \frac{L}{2})^2} - \sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2} + \sqrt{(z + \frac{L}{2})^2} \right]$$

$$= \frac{P}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2} - \left| z - \frac{L}{2} \right| - \sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2} + \left| z + \frac{L}{2} \right| \right]$$

برای حالت $z > \frac{L}{2}$ ، پتانسیل و میدان الکتریکی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varphi = \frac{P}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2} - \sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2} + L \right]$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = \frac{-P\hat{k}}{2\epsilon_0} \left[\frac{z(z - \frac{L}{2})}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} - \frac{(z + \frac{L}{2})}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} \right]$$

۴-۴- نشان دهید که در یک جسم دی‌الکتریک به حجم V و سطح خارجی S رابطه زیر میان قطبش $\vec{P}$ و چگالیهای بار قطبشی σ_P ، ρ_P برقرار است.

$$\int_V \vec{P} dV = \int_V \rho_P \vec{r} dV + \int_S \sigma_P \vec{r} da$$

در اینجا $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ بردار مکان از هر مبدأ مختصات ثابتی است [راهنمایی: $(x, \vec{P})$ را طبق معادله (۴-۱۰) بسط دهید].

حل: ابتدا اثبات را برای مؤلفه دکارتی x انجام می‌دهیم و بعد به مؤلفه‌های دیگر تعمیم می‌دهیم:

$$\vec{\nabla} \cdot (x\vec{P}) = x\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \vec{\nabla} x \quad (1)$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (2)$$

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (3)$$

از قضیه واگرایی داریم که:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (x\vec{P}) dV = \int_S x\vec{P} \cdot \hat{n} da$$

با توجه به رابطه (۱)، (۲)، (۳) می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_V (x\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \vec{\nabla} x) dV = \int_S x(\vec{P} \cdot \hat{n}) da$$

$$\int_V -x\rho_P dV + \int_V \vec{P} \cdot \vec{\nabla} x dV = \int_S x\sigma_P da$$

$$\int_V (P_x - x\rho_P) dV = \int_S x\sigma_P da$$

به همین ترتیب برای مؤلفه‌های y و z داریم:

$$\int_V (P_y - y\rho_P) dV = \int_S y\sigma_P da$$

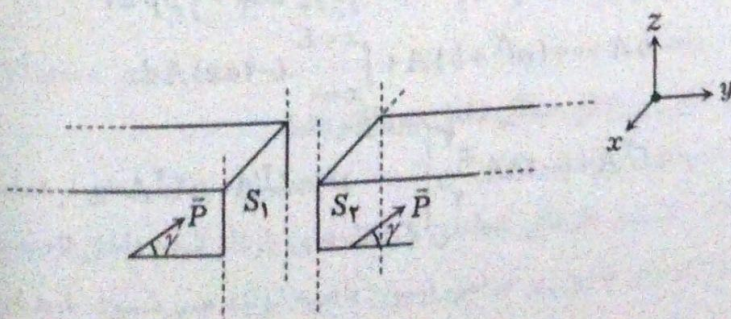
$$\int_V (P_z - z\rho_P) dV = \int_S z\sigma_P da$$

بنابراین از جمع سه رابطه اخیر داریم:

$$\int_V \vec{P} dV = \int_V \rho_P \vec{r} dV + \int_S \sigma_P \vec{r} da$$

۴-۵- دو قطعه دی‌الکتریک نیم‌متناهی را تقریباً در وضع تماس قرار داده‌ایم، به طوری که میان آنها شکاف باریکی با فاصله ثابت وجود دارد. قطبش $\vec{P}$ در سراسر قطعه‌ها مقداری ثابت و بابردار عمود بر سطوحی که شکاف میان دو قطعه را در بر می‌گیرند، زاویه γ می‌سازد. میدان الکتریکی را در شکاف میان دو قطعه حساب کنید.

حل:



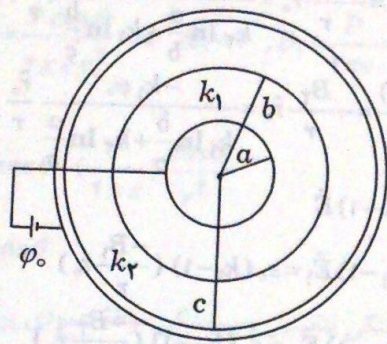
$$\left. \begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= \sigma \\ \sigma &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_{2n} = D_{1n} \Rightarrow D_2 \cos \theta_2 = D_1 \cos \theta_1 \quad (1)$$

$$E_{2t} = E_{1t} \Rightarrow \frac{D_{2t}}{\epsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} \Rightarrow \epsilon_1 D_2 \sin \theta_2 = \epsilon_2 D_1 \sin \theta_1 \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \epsilon_1 \tan \theta_2 = \epsilon_2 \tan \theta_1$$

۴-۸- یک کابل هم محور با مقطع دایره‌ای دارای یک دی‌الکتریک مرکب است، شعاع خارجی رسانای داخلی آن برابر a است، که با ورقه‌ای از یک ماده دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک k_1 و شعاع خارجی b احاطه شده است. روی این لایه ورقه‌ای از یک دی‌الکتریک دیگر با ثابت دی‌الکتریک k_2 و شعاع خارجی c قرار دارد. پوسته رسانای خارجی دارای شعاع داخل c است. اگر اختلاف پتانسیل ϕ_0 میان دو رسانا برقرار شود، قطبش را در هر نقطه از دو محیط دی‌الکتریک محاسبه کنید.

حل:



به دلیل تقارن استوانه‌ای حاکم ϕ فقط به صورت شعاعی تغییر می‌کند، در واقع $\phi = \phi(r)$ است، بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi(r) \\ q &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla^2 \phi(r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \Rightarrow r \frac{\partial \phi}{\partial r} = B$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{B}{r} \Rightarrow \phi(r) = B \ln r + A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_1(r) = A_1 + B_1 \ln r & a < r < b \quad (1) \\ \phi_2(r) = A_2 + B_2 \ln r & b < r < c \quad (2) \end{cases}$$

برای بدست آوردن ثابتهای B_2, A_2, B_1, A_1 ، شرط مرزی حاکم بر مسئله را اعمال می‌کنیم:

$$\phi_1(r=a) - \phi_2(r=c) = \phi_0$$

$$\Rightarrow (A_1 + B_1 \ln a) - (A_2 + B_2 \ln c) = \phi_0$$

$$\Rightarrow (A_1 - A_2) + (B_1 \ln a - B_2 \ln c) = \phi_0 \quad (3)$$

شرط پیوستگی پتانسیل در مرز میان دو محیط:

$$\phi_1(r=b) = \phi_2(r=b) \Rightarrow A_1 + B_1 \ln b = A_2 + B_2 \ln b$$

$$\Rightarrow A_1 - A_2 = B_2 \ln b - B_1 \ln b \quad (4)$$

با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۳) داریم:

$$B_2 \ln b - B_1 \ln b + B_1 \ln a - B_2 \ln c = \phi_0$$

$$\Rightarrow B_2 \ln \frac{b}{c} + B_1 \ln \frac{a}{b} = \phi_0 \quad (5)$$

چون باری در فصل مشترک دو محیط نیست، بنابراین مؤلفه عمودی بردار $\vec{D}$ پیوسته است:

چون بردار $\vec{P}$ در سراسر قطعه‌ها مقداری ثابت است، بنابراین:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$$

$$\rho_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{P1} = \vec{P} \cdot \hat{j} = P \cos \gamma \\ \sigma_{P2} = \vec{P} \cdot (-\hat{j}) = -P \cos \gamma \end{cases}$$

و می‌دانیم که میدان الکتریکی نزدیکی یک صفحه نامتناهی دی‌الکتریک با چگالی σ برابر است با:

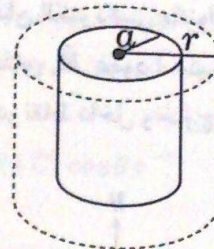
$$E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$$

بنابراین میدان میان دو صفحه نامتناهی دی‌الکتریک k_1 و k_2 با چگالی سطحی σ_{P1} و σ_{P2} برابر است با:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\sigma_{P1}}{2\epsilon_0} \hat{j} + \frac{\sigma_{P2}}{2\epsilon_0} (-\hat{j}) = \frac{P \cos \gamma}{2\epsilon_0} \hat{j} + \frac{-P \cos \gamma}{2\epsilon_0} (-\hat{j}) \\ &= \frac{2P \cos \gamma}{2\epsilon_0} \hat{j} = \frac{P \cos \gamma}{\epsilon_0} \hat{j} \end{aligned}$$

۴-۶- یک رسانای استوانه‌ای طویل به شعاع a را که بارالکتریکی در واحد طول آن λ است، در یک محیط دی‌الکتریک با گذردگی ثابت ϵ قرار می‌دهیم. میدان الکتریکی را در فاصله $r > a$ از محور استوانه محاسبه کنید؟

حل:



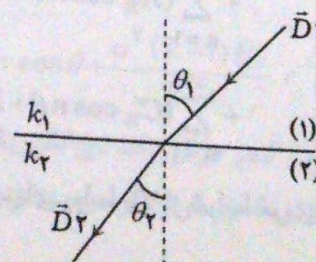
یک سطح گاوسی استوانه‌ای با شعاع $r > a$ در نظر می‌گیریم. بدلیل طول طویل استوانه، جابه‌جایی الکتریکی تابعی از z نیست و مؤلفه‌ای در این راستا ندارد، و همچنین بدلیل تقارن استوانه‌ای حاکم جابه‌جایی الکتریکی $\vec{D}$ تابعی از ϕ نیست و مؤلفه‌ای در این راستا ندارد، در واقع $\vec{D}$ فقط به صورت شعاعی تغییر می‌کند.

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q \Rightarrow D(2\pi r L) = \lambda L \Rightarrow D = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{r}_0$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon r} \hat{r}_0 \quad (r > a)$$

۴-۷- دو محیط دی‌الکتریک با ثابتهای دی‌الکتریک k_1 و k_2 با فصل مشترک تختی از یکدیگر جدا شده‌اند. فصل مشترک آنها بار خارجی ندارد. رابطه‌ای میان زوایای θ_1 و θ_2 ، که زوایای میان یک خط اختیاری جابه‌جایی و خط عمود بر فصل مشترک‌اند، پیدا کنید: θ_1 در محیط ۱ و θ_2 در محیط ۲.

حل:



و با توجه به شرایط مرزی مسئله خواهیم داشت: $[\varphi_1(r=R_1)=\varphi_2(r=R_1), \varphi(r \rightarrow \infty)=-E-Z]$

$$\begin{cases} \varphi_1(r, \theta) = (Ar + Br^{-2}) \cos \theta \\ \varphi_2(r, \theta) = (-E_0 r + Cr^{-2}) \cos \theta \end{cases}$$

برای به دست آوردن ضرایب ثابت از شرایط مرزی مسئله استفاده می‌کنیم:

$$E_{1t}(r, R_1) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \Big|_{r=R_1} = 0 \Rightarrow AR_1 + BR_1^{-2} = 0$$

$$\Rightarrow AR_1^3 = -B \quad (1)$$

$$\varphi_1(r=R_1) = \varphi_2(r=R_1) \Rightarrow AR_1 + BR_1^{-2} = -E_0 R_1 + CR_1^{-2}$$

$$\Rightarrow (A + E_0)R_1^3 = B + C \quad (2)$$

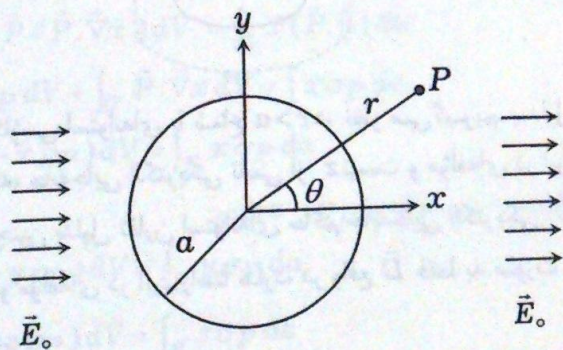
$$\sigma = 0 \Rightarrow D_{1r}(r=R_1) = D_{2r}(r=R_1) \Rightarrow k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$$

$$\Rightarrow k_1(A - 2BR_1^{-3}) = k_2(-E_0 - 2CR_1^{-3})$$

$$\Rightarrow AR_1^3 - 2B = \frac{k_2}{k_1}(-E_0 R_1^3 - 2C) \quad (3)$$

با استفاده از روابط (1) و (2) و (3) ضرایب A و B و C به دست آمده و φ_1 و φ_2 و در نتیجه میدان الکتریکی در دو ناحیه حاصل می‌شود.

۴-۱۰ یک دی الکتریک استوانه‌ای طویل به شعاع a و با ثابت دی الکتریک K در یک میدان الکتریکی یکنواخت قرار داده شده است. محور استوانه بر راستای $\vec{E}_0$ عمود است. استوانه بار خارجی ندارد. میدان الکتریکی را در نقاط داخل و خارج استوانه بدست آورید. حل:



بدلیل طویل بودن استوانه، پتانسیل تابعی از z نیست و چون $q=0$ است، با استفاده از هماهنگی‌های استوانه‌ای معادله لاپلاس می‌توان نوشت:

$$\nabla^2 \varphi(r, \theta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{in}(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) r^{-n} \\ \varphi_{out}(r, \theta) = A'_0 + B'_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta) r^n + \sum_{n=1}^{\infty} (C'_n \cos n\theta + D'_n \sin n\theta) r^{-n} \end{cases}$$

برای بدست آوردن ثابتهای روابط بالا از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم:

$$D_{1n}(r=b) = D_{2n}(r=b)$$

$$\Rightarrow k_1 \epsilon_0 \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=b} = k_2 \epsilon_0 \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=b}$$

$$k_1 \frac{B_1}{b} = k_2 \frac{B_2}{b} \Rightarrow k_1 B_1 = k_2 B_2 \quad (6)$$

از روابط (5) و (6) داریم:

$$B_1 = \frac{\varphi_0}{\ln \frac{a}{b} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{b}{c}}, \quad B_2 = \frac{\varphi_0}{\ln \frac{b}{c} + \frac{k_2}{k_1} \ln \frac{a}{c}}$$

بنابراین:

$$\varphi_1(r) = A_1 + \frac{k_2 \varphi_0}{k_2 \ln \frac{a}{b} + k_1 \ln \frac{b}{c}} \ln r$$

$$\varphi_2(r) = A_2 + \frac{k_1 \varphi_0}{k_1 \ln \frac{b}{c} + k_2 \ln \frac{a}{b}} \ln r$$

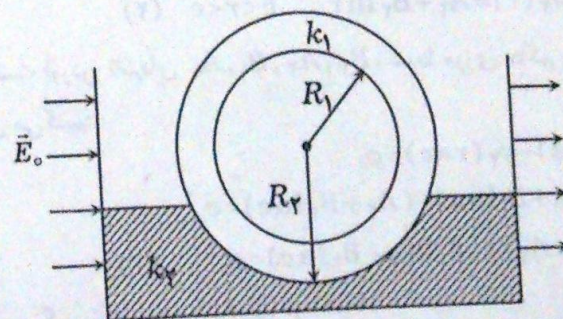
$$\vec{E}_1 = -\frac{\partial \varphi_1(r)}{\partial r} = -\frac{B_1}{r} \hat{r}_0 = \frac{-k_2 \varphi_0}{k_2 \ln \frac{a}{b} + k_1 \ln \frac{b}{c}} \left(\frac{1}{r} \right) \hat{r}_0$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\partial \varphi_2(r)}{\partial r} = -\frac{B_2}{r} \hat{r}_0 = \frac{-k_1 \varphi_0}{k_1 \ln \frac{b}{c} + k_2 \ln \frac{a}{b}} \frac{\hat{r}_0}{r}$$

$$\vec{P} = \chi \vec{E} = \epsilon_0 (k-1) \vec{E}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{P}_1 = \epsilon_0 (k_1 - 1) \vec{E}_1 = \epsilon_0 (k_1 - 1) \left(\frac{-B_1}{r} \hat{r}_0 \right) \\ \vec{P}_2 = \epsilon_0 (k_2 - 1) \vec{E}_2 = \epsilon_0 (k_2 - 1) \left(\frac{-B_2}{r} \hat{r}_0 \right) \end{cases}$$

۴-۹ یک رسانای کروی به شعاع R_1 توسط پوسته کروی دی الکتریک k جامدی با شعاع خارجی R_2 ، شعاع داخلی R_1 و ثابت دی الکتریک k_1 احاطه شده است. این جسم مرکب در سیالی با ثابت دی الکتریک k_2 فرو برده شده و تحت تأثیر یک میدان الکتریکی در آغاز یکنواخت $\vec{E}_0$ قرار گرفته است. میدان الکتریکی را در دو محیط دی الکتریک به دست آورید. حل:



با توجه به تقارن سمتی مسئله، پتانسیل $\varphi(r, \theta)$ را با استفاده از هماهنگی‌های منطقه‌ای به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\nabla^2 \varphi(r, \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

نقاط داخل و خارج کره پیدا کنید. راهنمایی: میدان در نقاط خارج میدانی دو قطبی است، در داخل، علاوه بر میدان دو قطبی یک جمله دیگر نیز لازم است.

حل: اگر محور z را در جهت گشتاور دو قطبی بگیریم، جواب معادله لاپلاس به صورت زیر است:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

چون φ در $r > a$ بر حسب $\cos \theta$ است و به دلیل اعمال شرایط مرزی، باید فقط جملات شامل $\cos \theta$ را نگه می‌داریم، بنابراین:

$$\varphi_{in} = A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta \quad r < a$$

$$\varphi_{out} = A'_0 + \frac{B'_0}{r} + A'_1 r \cos \theta + \frac{B'_1}{r^2} \cos \theta \quad r > a$$

چون کره باردار نیست، بنابراین: $B_0 = B'_0 = 0$

$$r \rightarrow \infty \quad \varphi_{out} \rightarrow 0 \quad A'_0 = A'_1 = 0$$

$$r \rightarrow 0 \quad \varphi_{in} = \frac{P \cos \theta}{4\pi \epsilon r^2} \Rightarrow A_0 = 0, B_1 = \frac{P}{4\pi \epsilon} = \frac{P}{4\pi k \epsilon_0}$$

بنابراین:

$$\varphi_{in} = A_1 r \cos \theta + \left(\frac{P}{4\pi \epsilon} \right) \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$\varphi_{out} = \frac{B'_1}{r^2} \cos \theta$$

با اعمال شرط پیوستگی پتانسیل و پیوستگی مؤلفه عمودی بردار جابه‌جایی در $(r=a)$ داریم:

$$\varphi_{in}(r=a) = \varphi_{out}(r=a)$$

$$\Rightarrow A_1 a \cos \theta + \left(\frac{P}{4\pi \epsilon} \right) \frac{\cos \theta}{a^2} = \frac{B'_1}{a^2} \cos \theta$$

$$\Rightarrow A_1 + \frac{P}{4\pi \epsilon a^3} = \frac{B'_1}{a^2} \quad (1)$$

$$D_{in}(r=a) = D_{out}(r=a)$$

$$\Rightarrow \epsilon \left(-\frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r} \right) \bigg|_{r=a} = \epsilon_0 \left(-\frac{\partial \varphi_{out}}{\partial r} \right) \bigg|_{r=a}$$

$$\epsilon \left(A_1 - \frac{2P}{4\pi \epsilon a^3} \right) = -2\epsilon_0 \frac{B'_1}{a^3} \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$A_1 = \frac{2P(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi \epsilon a^3 (\epsilon + 2\epsilon_0)}, \quad B'_1 = \frac{2P\epsilon}{4\pi \epsilon (\epsilon + 2\epsilon_0)}$$

بنابراین:

$$\varphi_{in} = \frac{P \cos \theta}{4\pi \epsilon} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{2(\epsilon - \epsilon_0)}{a^3 (\epsilon + 2\epsilon_0)} r \right]$$

$$\varphi_{out} = \frac{2P \cos \theta}{4\pi (\epsilon + 2\epsilon_0)} \frac{1}{r^2}$$

۴-۱۲- نشان دهید که پاسخ به دست آمده در بخش (۴-۸)، برای دی‌الکتریک کروی در میدانی که در آغاز یکنواخت است، اگر k به

بدلیل اینکه استوانه بار خارجی ندارد، بنابراین:

$$B'_0 = 0$$

و همچنین بدلیل اینکه در $r \rightarrow \infty$ ، $\varphi = -E_0 r \cos \theta + \varphi_0$ است، داریم:

$$A'_0 = \varphi_0, B'_n = 0 \quad \forall n, A'_1 = -E_0, A'_n = 0 \quad n > 1$$

بنابراین φ_{out} را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varphi_{out} = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} (C'_n \cos n\theta + D'_n \sin n\theta) r^{-n}$$

بدلیل اینکه $r \rightarrow 0$ نباید $\varphi \rightarrow \infty$ باشد، در نتیجه:

$$B_0 = 0, C_n = 0 \quad \forall n, D_n = 0 \quad \forall n$$

بنابراین φ_{in} را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varphi_{in} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n$$

و به دلیل اینکه $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ است، در واقع φ فقط تابعی از x است، بنابراین در $\varphi_{in}, \varphi_{out}$ فقط جملات کسینوسی باقی می‌مانند:

$$\varphi_{out} = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} (C'_n \cos n\theta) r^{-n}$$

$$\varphi_{in} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta) r^n$$

و بدلیل شرایط مرزی $\varphi_{in}(r=a) = \varphi_{out}(r=a)$ و همچنین

$D_{in}(r=a) = D_{out}(r=a)$ ، می‌توان نتیجه گرفت که جملات شامل

$(\cos n\theta, n \geq 2)$ حذف می‌شوند:

$$\varphi_{out} = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + C'_1 \cos \theta r^{-1}$$

$$\varphi_{in} = A_0 + A_1 \cos \theta r$$

$$\varphi_{out}(r=a) = \varphi_{in}(r=a)$$

$$\Rightarrow \varphi_0 - E_0 a \cos \theta + C'_1 \frac{\cos \theta}{a} = A_0 + A_1 a \cos \theta$$

$$\Rightarrow A_0 = \varphi_0, \quad A_1 = -E_0 + \frac{C'_1}{a^2}$$

$$D_{in}(r=a) = D_{out}(r=a)$$

$$\Rightarrow -\epsilon \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r} \bigg|_{r=a} = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi_{out}}{\partial r} \bigg|_{r=a}$$

$$k(-E_0 + \frac{C'_1}{a^2}) \cos \theta = -E_0 \cos \theta - C'_1 \cos \theta a^{-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{-2E_0}{k+1} \\ C'_1 = \frac{a^2(k-1)E_0}{k+1} \end{cases}$$

بنابراین:

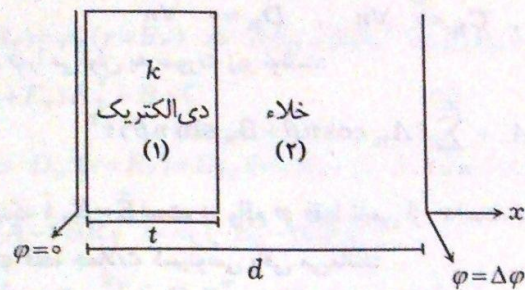
$$\varphi_{in} = \varphi_0 - \frac{2E_0}{k+1} r \cos \theta$$

$$\varphi_{out} = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{a^2(k-1)E_0}{k+1} r^{-1} \cos \theta$$

۴-۱۱- دو قطبی نقطه‌ای $\vec{p}$ در مرکز یک دی‌الکتریک جامد کروی به شعاع a و با ثابت دی‌الکتریک k قرار دارد. میدان الکتریکی را در

۴-۱۵- دو صفحه رسانای موازی که به فاصله d از یکدیگر قرار دارند، در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه داشته شده‌اند، یک تپه از جسم دی‌الکتریکی را که ثابت دی‌الکتریک آن k و ضخامت یکنواخت آن t است ($t < d$) میان این دو صفحه قرار می‌دهیم. بردارهای میدان $\vec{E}$ و $\vec{D}$ در دی‌الکتریک و همچنین در خلاء میان دی‌الکتریک و یکی از صفحات را پیدا کنید. از اثرهای لبه که از متناهی بودن صفحات ناشی می‌شود، چشم‌پوشی کنید.

حل:



با توجه به شکل پتانسیل فقط تابعی از x است، بنابراین:

$$\nabla^2 \varphi(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = A \Rightarrow \varphi = Ax + B$$

$$\varphi = Ax + B \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = A_1 x + B_1 \\ \varphi_2 = A_2 x + B_2 \end{cases}$$

برای بدست آوردن ضرایب ثابت، شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$\varphi_1(x=0) = 0 \Rightarrow A_1(0) + B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0 \quad (1)$$

$$\varphi_2(x=d) = \Delta\varphi \Rightarrow A_2 d + B_2 = \Delta\varphi \quad (2)$$

از پیوستگی پتانسیل و مؤلفه عمودی بردار جابه‌جایی در مرز بین خلاء و دی‌الکتریک داریم:

$$\varphi_1(x=t) = \varphi_2(x=t) \Rightarrow A_1 t = A_2 t + B_2 \quad (3)$$

$$\sigma = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$\Rightarrow k \epsilon_0 \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=t} = \epsilon_0 \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \Big|_{x=t}$$

$$\Rightarrow k A_1 = A_2 \quad (4)$$

از سه معادله (۲)، (۳) و (۴) داریم:

$$A_1 = \frac{\Delta\varphi}{kd - t(k-1)} \quad A_2 = \frac{k\Delta\varphi}{kd - t(k-1)}$$

$$B_2 = (A_1 - A_2)t$$

بنابراین:

$$\varphi_1 = \frac{\Delta\varphi}{kd - t(k-1)} x, \quad \varphi_2 = \frac{k\Delta\varphi}{kd - t(k-1)} x + (A_1 - A_2)t$$

$$\vec{E}_1 = \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \hat{i} = \frac{-\Delta\varphi}{kd - t(k-1)} \hat{i} \Rightarrow \vec{D}_1 = \epsilon \vec{E}_1$$

$$\vec{E}_2 = \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \hat{i} = \frac{-k\Delta\varphi}{kd - t(k-1)} \hat{i} \Rightarrow \vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2$$

بنابراین $\vec{D}$ در تمامی فضای میان ضخامت تقریباً یکسان است.

۴-۱۶- دو صفحه رسانای موازی که به فاصله d از یکدیگر قرار دارند، در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه داشته شده‌اند یک تپه از جسم

سمت بی‌نهایت میل کند، نتیجه با آنچه در بخش ۳-۵ برای کره رسانا به دست آمد، یکی است.

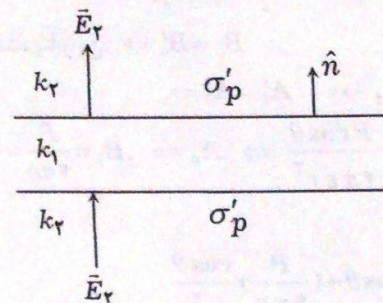
حل: در بخش (۴-۸)، میدان در داخل کره دی‌الکتریک:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_r &= \frac{3}{k+2} \vec{E}_0 \\ k &\rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}_r = 0$$

میدان در داخل رسانا صفر است، که با مطالب فصل (۳) مطابقت دارد.

۴-۱۳- تپه تختی از یک ماده با ثابت دی‌الکتریک k_1 از هر دو طرف توسط ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک k_2 محصور شده است. میدان الکتریکی E_r در محیط ۲، به صورت یکنواخت و عمود بر مرزها داده شده است. (الف) میدان E_1 ، (ب) قطبش P_1 و (ج) بار قطبشی را در محیط ۱ پیدا کنید.

حل:



(الف) بردار $\vec{E}_r$ بر مرزها عمود است، بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} E_{rt} &= 0 \\ E_{1t} &= E_{rt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_{1t} = 0$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad \sigma = 0 \Rightarrow D_{2n} = D_{1n}$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 k_2 E_{2n} = \epsilon_0 k_1 E_{1n}$$

$$\Rightarrow E_{1n} = \frac{k_2}{k_1} E_{2n} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{k_2}{k_1} \vec{E}_r$$

(ب)

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}_1 &= \chi \vec{E}_1 = \epsilon_0 (k_1 - 1) \vec{E}_1 \\ \vec{E}_1 &= \frac{k_2}{k_1} \vec{E}_r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{P}_1 = \epsilon_0 (k_1 - 1) \frac{k_2}{k_1} \vec{E}_r$$

(ج)

$$\rho P_1 = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_1 = 0$$

$$\sigma_p = \vec{P}_1 \cdot \hat{n} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_p = \vec{P}_1 \cdot \hat{n} = \epsilon_0 (k_1 - 1) \frac{k_2}{k_1} E_r \\ \sigma_p = \vec{P}_1 \cdot (-\hat{n}) = -\epsilon_0 (k_1 - 1) \frac{k_2}{k_1} E_r \end{cases}$$

۴-۱۴- نشان دهید که اگر در مسئله (۴-۱۳)، k_1 به سمت بینهایت میل کند، نتیجه از لحاظ فیزیکی با معادله (۴-۴۴) سازگار است.

حل: در قسمت (ب) سؤال (۴-۱۳) بدست آمد:

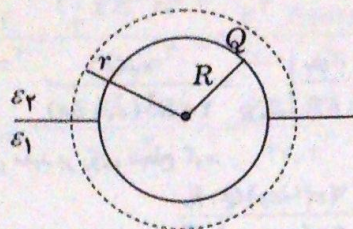
$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{k_2}{k_1} \vec{E}_r \\ k_1 &\rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}_1 = 0 \Rightarrow E_{1n} = 0 \Rightarrow D_{1n} = 0$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \Rightarrow D_{2n} = \sigma$$

که این همان معادله (۴-۴۴) است.

الکتریکی شعاعی متناسب با عکس مجذور فاصله به دست آورید که در تمام شرایط مرزی صدق کند. چگالی بارهای آزاد، مقید و کل را برای تمام نقاط واقع بر سطح کره پیدا کنید. (ب) نشان دهید که این میدان الکتریکی، میدان واقعی است.

حل:



با توجه به تقارن کروی حاکم، پتانسیل فقط به صورت شعاعی تغییر می‌کند، بنابراین:

$$\nabla^2 \varphi(r) = -\frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \nabla^2 \varphi(r) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2}$$

$$\varphi(r) = \frac{A}{r} + B \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \frac{A_1}{r} + B_1 \\ \varphi_2 = \frac{A_2}{r} + B_2 \end{cases}$$

برای مشخص کردن ثابت‌های A و B از شرایط مرزی حاکم استفاده می‌کنیم:

$$\varphi(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow B_1 = B_2 = 0$$

$$\varphi_1(r=R) = \varphi_2(r=R) \Rightarrow \frac{A_1}{R} = \frac{A_2}{R}$$

$$\Rightarrow A_1 = A_2 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = \frac{A}{r}$$

قانون گاوس برای بردار جابه‌جایی $\vec{D}$ (سطح گاوسی یک کره به شعاع r فرض می‌شود) به صورت زیر است:

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

و بردار $\vec{D}$ برای دو محیط به صورت زیر است:

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1 = -\epsilon_1 \vec{\nabla} \varphi_1 = \epsilon_1 \frac{A}{r^2} \hat{r}_0$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2 = -\epsilon_2 \vec{\nabla} \varphi_2 = \frac{\epsilon_2 A}{r^2} \hat{r}_0$$

بنابراین:

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \Rightarrow D_1(2\pi r^2) + D_2(2\pi r^2) = Q \Rightarrow$$

$$\epsilon_1 A(2\pi) + \epsilon_2 A(2\pi) = Q \Rightarrow A = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

بنابراین پتانسیل و میدان الکتریکی در دو محیط به صورت زیر است:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{A}{r} = \frac{Q}{2\pi r(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

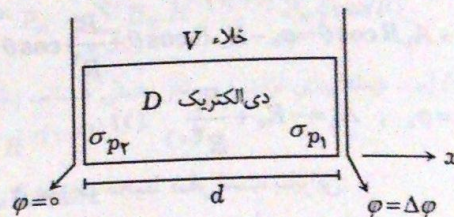
$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = -\vec{\nabla} \varphi = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r^2} \hat{r}_0$$

چگالی بار سطحی آزاد بر روی سطح کره:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad D_{1n} = 0 \Rightarrow D_{2n} = \sigma$$

دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک k و ضخامت d را میان دو صفحه وارد می‌کنیم، اما این بُره حجم میان صفحات را کاملاً پر نمی‌کند. مطلوب است محاسبه میدان الکتریکی: (الف) در دی‌الکتریک، (ب) در ناحیه خلأ میان صفحات، چگالی بار σ را در آن قسمتی از صفحه را پیدا کنید که (ج) بادی الکتریک و (د) با خلأ در تماس است. (ه) σ_P را بر روی سطح بُره دی‌الکتریک پیدا کنید.

حل:



با توجه به شکل پتانسیل فقط بر حسب x تغییر می‌کند، بنابراین:

$$\nabla^2 \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi = Ax + B \Rightarrow \begin{cases} \varphi_V = A_1 x + B_1 \\ \varphi_D = A_2 x + B_2 \end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی می‌توان ضرایب ثابت را بدست آورد، بنابراین:

$$\varphi_V|_{x=0} = \varphi_D|_{x=0} = 0 \Rightarrow B_1 = B_2 = 0$$

$$\varphi_V|_{x=d} = \varphi_D|_{x=d} = \Delta\varphi \Rightarrow \begin{cases} A_1 d = \Delta\varphi \Rightarrow \varphi_V = \frac{\Delta\varphi}{d} x \\ A_2 d = \Delta\varphi \Rightarrow \varphi_D = \frac{\Delta\varphi}{d} x \end{cases}$$

(الف)

$$\varphi_D = \frac{\Delta\varphi}{d} x \Rightarrow \vec{E}_D = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} = -\frac{\Delta\varphi}{d} \hat{i}$$

(ب)

$$\varphi_V = \frac{\Delta\varphi}{d} x \Rightarrow \vec{E}_V = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} = -\frac{\Delta\varphi}{d} \hat{i}$$

(ج)

$$\left. \begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= \sigma \\ D_{1n} &= 0 \Rightarrow D_{2n} = \sigma \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_{2n} = \sigma \Rightarrow k\epsilon_0 E_D = \sigma \Rightarrow \sigma = -k\epsilon_0 \frac{\Delta\varphi}{d}$$

(د)

$$\left. \begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= \sigma \\ D_{1n} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_{2n} = \sigma \Rightarrow \epsilon_0 E_V = \sigma \Rightarrow \sigma = -\epsilon_0 \frac{\Delta\varphi}{d}$$

(ه)

$$\vec{P} = \chi \vec{E}_D = \epsilon_0 (k-1) \left(-\frac{\Delta\varphi}{d} \right) \hat{i}$$

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{P1} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot \hat{i} = \frac{\epsilon_0 (k-1) \Delta\varphi}{d} \\ \sigma_{P2} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot (-\hat{i}) = -\frac{\epsilon_0 (k-1) \Delta\varphi}{d} \end{cases}$$

۱۷-۴ یک کره رسانا به شعاع R در یک محیط دی‌الکتریک مایع با گذردهی ϵ_1 تا نیمه غوطه‌ور است. در ناحیه بالای مایع، گازی است با گذردهی ϵ_2 ، بار کل بر روی کره Q است. (الف) یک میدان

بنابراین چگالی بار سطحی آزاد بر روی سطح کره در محیط با گذردهی ϵ_1 برابر است با:

$$\sigma_1 = D_{1n} = -\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \bigg|_{r=R} = \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi R^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

و همچنین چگالی بار سطحی آزاد بر روی سطح کره در محیطی با گذردهی ϵ_2 برابر است با:

$$\sigma_2 = D_{2n} = -\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \bigg|_{r=R} = \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi R^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

چگالی بار سطحی مقید بر روی سطح کره:

$$\vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \epsilon_0 \vec{E}_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) Q}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) R^2} \hat{r}_0$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \vec{P}_1 \cdot \hat{n}_1 \bigg|_{r=R} = \vec{P}_1 \cdot (-\hat{r}) = \frac{-Q(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) R^2}$$

$$\vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \epsilon_0 \vec{E}_2 = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0) Q}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) R^2} \hat{r}_0$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \vec{P}_2 \cdot \hat{n}_2 \bigg|_{r=R} = \vec{P}_2 \cdot (-\hat{r}) = \frac{-Q(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) R^2}$$

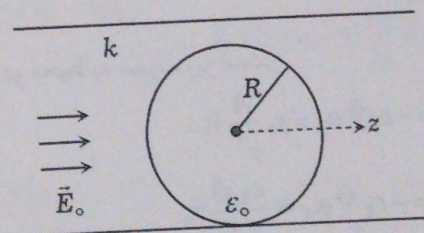
برای بار سطحی کل:

$$\sigma_{total} = \sigma_P + \sigma_f \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{total(1)} = \frac{\epsilon_0 Q}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) R^2} \\ \sigma_{total(2)} = \frac{\epsilon_0 Q}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) R^2} \end{cases}$$

۴-۱۸- میدان الکتریکی یکنواخت E_0 در محیطی با ثابت دی الکتریک k برقرار شده است. ثابت کنید که میدان در حفره‌ای کروی در درون این محیط عبارت است از:

$$E = \frac{3kE_0}{2k+1}$$

حل:



با توجه به تقارن سمتی حاکم، پتانسیل را می‌توان با استفاده از هماهنگیهای منطقه‌ای به صورت زیر نوشت:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

برای بدست آوردن ثابتهای A و B در دو ناحیه از شرایط مرزی حاکم استفاده می‌کنیم:

$$\varphi(r \rightarrow \infty) = -E_0 r \cos \theta + \varphi_0$$

$$\varphi_{in}(r=R) = \varphi_{out}(r=R)$$

بنابراین فقط جملات $\cos \theta$ را در نظر می‌گیریم. و همچنین:

$$\varphi(r \rightarrow 0) \neq \infty$$

بنابراین تمام ضرایب $r^{-(n+1)}$ برای پتانسیل φ_{in} صفر هستند.

$$\varphi_{in} = A_0 + A_1 r \cos \theta$$

$$\varphi_{out} = A'_0 + A'_1 r \cos \theta + \frac{B'_1}{r^2} \cos \theta$$

شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم تا ضرایب را بدست آوریم:

$$\varphi(r \rightarrow \infty) = -E_0 r \cos \theta + \varphi_0 \Rightarrow A'_0 = \varphi_0, A'_1 = -E_0$$

$$\varphi_{in}(r=R) = \varphi_{out}(r=R)$$

$$\Rightarrow A_0 + A_1 R \cos \theta = \varphi_0 - E_0 R \cos \theta + \frac{B'_1}{R^2} \cos \theta$$

$$\Rightarrow A_0 = \varphi_0, A_1 = -E_0 + \frac{B'_1}{R^3} \quad (1)$$

چگالی بار سطحی در مرز دو محیط صفر است، بنابراین:

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r} \bigg|_{r=R} = \epsilon \frac{\partial \varphi_{out}}{\partial r} \bigg|_{r=R}$$

$$\epsilon_0 A_1 = -\epsilon E_0 - \frac{2\epsilon}{R^3} B'_1 \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$A_1 = \frac{-3\epsilon E_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon}, \quad B'_1 = \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0 + 2\epsilon} R^3 E_0$$

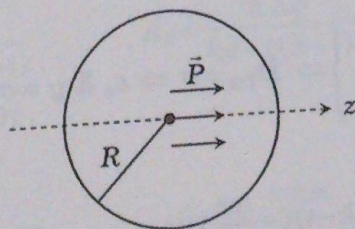
بنابراین φ_{in} برابر است با:

$$\varphi_{in} = \varphi_0 - \frac{3\epsilon E_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon} r \cos \theta = \varphi_0 - \frac{3\epsilon E_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon} z$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = \frac{3\epsilon E_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon} \hat{k} = \frac{3kE_0}{1+2k} \hat{k}$$

۴-۱۹- یک کره دی الکتریک به شعاع R قطبش دائمی برابر $\vec{P}$ دارد که از حیث مقدار و جهت یکنواخت است. این کره قطبیده، یک میدان الکتریکی تولید می‌کند. این میدان را (الف) در داخل و (ب) در خارج کره پیدا کنید. در داخل کره، میدان الکتریکی را که در جهت مخالف قطبش است، میدان واقطبیدگی می‌گویند. راهنمایی: چون $\vec{P} \cdot \vec{\nabla}$ در تمام نقاط صفر است، پتانسیل الکتروستاتیکی در داخل و خارج کره در معادله لاپلاس صدق می‌کند. فرض نکنید که دی الکتریک با یک ثابت دی الکتریک مشخص می‌شود.

حل:



با توجه به تقارن سمتی حاکم، پتانسیل با استفاده از هماهنگیهای منطقه‌ای را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{P} = P \hat{k} \Rightarrow \nabla^2 \varphi(r, \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

با اعمال شرایط مرزی، می‌توان ضرایب ثابت پتانسیل را بدست آورد:

$$\varphi_{out}(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow A_n = 0 \quad \forall n$$

$$P = \frac{P_d}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow P_d = P \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right)$$

$$\vec{P} = \rho_0^+ (\delta^+ - \delta^-) \Rightarrow \vec{P}_d = q^+ (\delta^+ - \delta^-)$$

و می‌دانیم که پتانسیل یک دو قطبی برابر است با:

$$\varphi_{out} = \frac{\vec{P}_d \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{(\frac{4}{3}\pi R^3) \vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{R^3 P \cos\theta}{3\epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}_{out} = -\vec{\nabla} \varphi_{out} = \frac{2PR^3 \cos\theta}{3\epsilon_0 r^3} \hat{r}_0 + \frac{PR^3 \sin\theta}{3\epsilon_0 r^3} \hat{\theta}_0$$

که با پاسخ مسئله (۴-۱۹) مطابقت دارد.

۵ میراث پدر

پدری نزدیک مرگ به فرزندش گفت که نام و مکنت و هر چیز دیگری که به درد زندگی بخورد برای تو بر جای نگذاشته‌ام، و تنها چیزی که به تو می‌توانم به میراث بدهم سه قاعده است.

نخست اینکه هرگز از «آنها» نترس. مردمان از «آنها» بیش از هر چیز در این جهان بیم دارند. سرداران نیرومند شجاعانه با دشمنان سرسخت روبه رو می‌شوند ولی از اینکه «آنها» چه می‌گویند و «آنها» چه می‌اندیشند و «آنها» چه چیز را دوست دارند، سخت می‌هراسند.

قاعده دوم مهمتر است. هرگز در بند جمع‌آوردن چیزهای بیجان مباش. این کار از تو بر نمی‌آید، چه آنها تو را جمع می‌کنند و مالک تو می‌شوند. هر چه بیشتر مالک شوی بیشتر مملوک شده‌ای، و چنین است که من اکنون جز آنچه ضروری است چیزی در اختیار ندارم.

سوم اینکه نخست به خود بخند. در هر کس جنبه خنده آوری وجود دارد و همه چنان دوست دارند که به کس دیگر بخندند. اگر تو خود نخست به خویشتن بخندی، آن‌گاه چنان می‌شوی که خنده دیگران آزاری به تو نمی‌رساند.

* برای آنکس که ایمان دارد، ناممکن وجود ندارد. افراد، برای فرار از رنج تلاش بیشتری می‌کنند تا برای کسب لذت. آنتونی رابینز

* ضعف، فرساینده زندگی است و مقاومت، سازنده آن. هر گاه سختی‌ها و مشکلات شما را از تلاش باز داشتند کمی اندیشه کنید و از خود بپرسید آیا این خاصیت کودکی من نیست که همه چیز را حاضر و آماده می‌خواهد. تامس هریس

* از لمس کردن، از احساس کردن و از ابزار احساسات خود نهراسیم. راحت‌ترین کار دنیا این است که آنچه هستیم باشیم و آنچه را که احساس می‌کنیم نشان دهیم. به جای زندگی در گذشته‌ها در اکنون زندگی کن. وقتی غذا می‌خوری، غذا بخور،

$$\Rightarrow \varphi_{out} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{in}(r \rightarrow \infty) \rightarrow \infty \Rightarrow B_n = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \varphi_{in} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{in}(r=R) = \varphi_{out}(r=R)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

و چون P_n (چند جمله‌ایهای لژاندر) مستقل خطی هستند، بنابراین:

$$A_n R^n = B_n R^{-(n+1)} \quad (1)$$

$$\vec{E}_{out} = \vec{E}_{in} = \frac{\sigma_{total}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \varphi_{out}}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\sigma_P + \sigma_f}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} = \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}_0}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{P \cos\theta}{\epsilon_0} = \frac{P P_1(\cos\theta)}{\epsilon_0}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n A_n R^{n-1} P_n(\cos\theta)$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_n R^{-(n+2)} P_n(\cos\theta) = \frac{P P_1(\cos\theta)}{\epsilon_0}$$

$$n=0 \quad A_1 + 2B_1 R^{-3} = \frac{P}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$n \neq 1 \quad n A_n R^{n-1} + (n+1) B_n R^{-(n+2)} = 0$$

$$\Rightarrow A_n = B_n = 0 \quad n \neq 1 \quad (3)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} A_1 R = B_1 R^{-2} \\ A_1 + \frac{2B_1}{R^3} = \frac{P}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{P}{3\epsilon_0}, B_1 = \frac{PR^3}{3\epsilon_0}$$

بنابراین:

$$\varphi_{in} = \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos\theta = \frac{P}{3\epsilon_0} z$$

$$\varphi_{out} = \frac{PR^3 \cos\theta}{3\epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}_{in} = -\vec{\nabla} \varphi_{in} = \frac{-P}{3\epsilon_0} \hat{k} = \frac{-\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{out} = -\vec{\nabla} \varphi_{out} = \frac{-\partial \varphi_{out}}{\partial r} \hat{r}_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{out}}{\partial \theta} \hat{\theta}_0$$

$$= \frac{2PR^3}{3\epsilon_0 r^3} \left[(\cos\theta) \hat{r}_0 + \frac{\sin\theta}{2} \hat{\theta}_0 \right]$$

۴-۲۰ در متن کتاب نشان داده شد که قطبش به صورت

$$\vec{P} = \rho_0^+ (\delta^+ - \delta^-)$$

که به طور یکنواخت قطبیده شده است، به کار ببرید و میدان خارجی دو قطبی را مستقیماً پیدا کنید.

حل: می‌دانیم که گشتاور دو قطبی در واحد حجم، قطبش نامیده می‌شود، بنابراین:

نظریه میکروسکوپی دی الکتریک‌ها

$\vec{E}_m$ ، یک گشتاور دو قطبی دائمی داشته باشد. در مولکولهای غیرقطبی گرانیگاههای توزیع بارهای مثبت و منفی به طور عادی بر یکدیگر منطبق‌اند، اعمال میدان الکتریکی بر دی الکتریک سبب جابه‌جایی نسبی بارهای مثبت و منفی در مولکول‌های غیر قطبی می‌شود و دو قطبی‌های مولکولی که بدین نحو پدید می‌آیند، به دو قطبیهای القایی موسوم هستند. در میدان الکتریکی ناشی از تغییر شکل توزیع بار الکترونی، تمام مولکولها گشتاور دو قطبی القایی پیدا می‌کنند. از تحلیل یک مدل خطی ساده، قطبش‌پذیری اتمی ثابتی نتیجه می‌شود که با حجم اتم متناسب است.

$$\alpha_0 = 4\pi \epsilon_0 R_0^3 \quad (5-6)$$

این قطبش‌پذیری ثابت و مستقل از میدان قطبیده است و دی الکتریکی که بدین گونه توصیف شود، خطی است.

مولکولهای قطبی (فرمول لانژون - دبی)

در اثنای تشکیل مولکول، ممکن است برخی از الکترونها یک اتم به طور کامل یا به طور جزئی به اتم دیگر منتقل شوند و پس از این انتقال آرایش الکترونی حاصل به نحوی باشد که مراکز بارهای مثبت و منفی در مولکول برهم منطبق نباشد. اگر میدان الکتریکی وجود نداشته باشد، یک قطعه ماکروسکوپی از دی الکتریک قطبی قطبیده نخواهد بود، زیرا سم‌تگیری تک‌تک دو قطبیهای کاتوره‌ای است. ولی اگر دی الکتریک قطبی تحت تأثیر میدان الکتریکی قرار گیرد، بر هر یک از دو قطبیهای آن گشتاور نیرویی وارد می‌شود و گرایش این گشتاورها چنان است که می‌خواهند دو قطبیهای را با میدان همسو کنند. اگر میدان به اندازه کافی قوی باشد، ممکن است دو قطبیهای کاملاً همسو شوند که در آن صورت قطبش به مقدار اشباع خود خواهد رسید:

$$\vec{P}_s = N \vec{P}_m \quad (5-7)$$

N تعداد مولکولها در واحد حجم است.

فقدان همسویی کامل دو قطبیهای ناشی از انرژی گرمایی مولکولهاست که در جهت ایجاد سم‌تگیریهایی کاتوره‌ای برای دو قطبیهای عمل می‌کند.

میدان مولکولی در دی الکتریکها

عبارت است از میدان الکتریکی در محل هر یک از مولکولها در دی الکتریک و این میدان از همه چشمه‌های خارجی و همه مولکولهای قطبیده در دی الکتریک، به استثنای مولکولی که در نقطه مورد مطالعه قرار دارد، ناشی می‌شود. در واقع مولکول به میدان اعمال شده $\vec{E}$ و همچنین به خود قطبش (یعنی، میدان‌های دو قطبی تمامی مولکولهای دیگر) بستگی دارد.

در ساده‌ترین موارد

$$\vec{E}_m = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad (5-1)$$

در حالت عادی $\vec{E}_m$ را می‌توان از این معادلات حذف کرد و نوشت:

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \quad (5-2)$$

که در آن χ پذیرفتاری ثابت و برابر است با:

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}} \quad (5-3)$$

اما هنگامی که قطبش‌پذیری مولکولها زیاد باشد ($N\alpha > 3\epsilon_0$)، پاسخ دیگری با $\vec{E} = 0$ و $\vec{P} \neq 0$ امکان‌پذیر است. (یعنی، ممکن است موقعی که میدان اعمال شده صفر است، ماده مثل جسم فروالکتریک، به طور خود به خود قطبیده شود).

قطبش ماکروسکوپی $\vec{P}$ هر ماده دی الکتریک همسانگرد به گشتاور دو قطبی مولکولی $\vec{P}_m$ که در پاسخ به میدان الکتریکی موضعی در مکان مولکول (یعنی میدان مولکول $\vec{E}_m$) بوجود می‌آید، بستگی دارد.

$$\vec{P} = N \vec{P}_m \quad (5-4)$$

معمولاً $\vec{P}_m$ با تقریب خوبی با $\vec{E}_m$ متناسب است:

$$\vec{P}_m = \alpha \vec{E}_m \quad (5-5)$$

که α قطبش‌پذیری مولکولی است.

دو قطبیهای القایی، یک مدل ساده

مولکولهای دی الکتریکها را در دو گروه قطبی و غیرقطبی رده‌بندی می‌کنند. مولکول قطبی آن است که حتی در غیاب میدان قطبیده

$$k = 1/0.0059$$

$$PV = nRT \xrightarrow{\text{شرایط استاندارد}} 1/0.13 \times 10^5 = \left(\frac{n}{V}\right) (8/314) (273)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{V} = 44/63 \left(\frac{\text{مول}}{m^3}\right)$$

$$\Rightarrow N = \left(\frac{n}{V}\right) N_0 = 44/63 \times 6/0.2 \times 10^{23} = 2/68 \times 10^{25} \left(\frac{\text{مولکول}}{m^3}\right)$$

بنابراین:

$$\alpha \text{ (اتم‌ها)} = 2\alpha \text{ (مولکول‌های هوا)}$$

$$= \frac{3 \times 8/85 \times 10^{-12} (1/0.0059 - 1)}{27/7 \times 10^{-12} (1/0.0059 + 2)} = 1/43 \times 10^{-41}$$

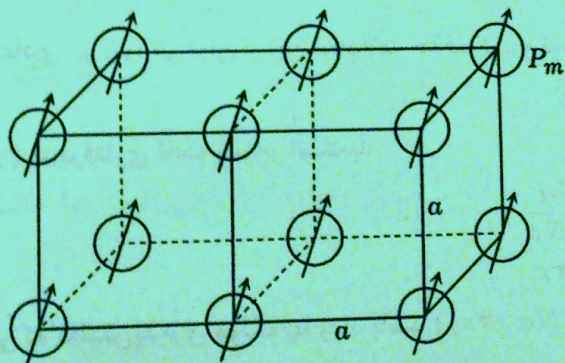
$$\Rightarrow \alpha \text{ (اتم‌ها)} = 9/7 \times 10^{-41}$$

(ب)

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R_0^3$$

$$\Rightarrow R_0 = \left(\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}\right)^{1/3} = \left(\frac{9/7 \times 10^{-41}}{4\pi\epsilon_0}\right)^{1/3} = 9/55 \times 10^{-11} \text{ (m)}$$

۵-۲- شکل ۷-۵ شبکه مکعبی ساده‌ای از مولکول‌ها را نشان می‌دهد که تمام مولکول‌های آن گشتاور دو قطبی P_m یکسانی (از حیث جهت و مقدار) دارند. مولکول معینی را در نظر می‌گیریم و آن را z می‌نامیم. واضح است که نزدیک‌ترین همسایه‌های z شش مولکول‌اند که در فاصله a واقع‌اند، نزدیک‌ترین همسایه‌های بعدی آن دوازده مولکول در فاصله $\sqrt{2}a$ و به همین ترتیب.



شکل ۷-۵ قسمتی از آرایه مکعبی ساده مولکول‌ها که گشتاور دو قطبی هر یک P_m است.

میدان الکتریکی ناشی از شش P_m مولکول‌های نزدیک‌ترین همسایه‌ها را به ازای جهتی دلخواه برای P_m در محل z به دست آورید. (خطوطی که z را به نزدیک‌ترین همسایه‌های متصل می‌کنند، محورهای x ، y و z اختیار کنید. برای سهولت P_m را در صفحه xz بگیرید به طوری که با محور x زاویه θ بسازد).

حل: میدان برآیند شش دو قطبی در محل z امین دو قطبی برابر است با:

$$\vec{E}_j = \sum_{i=1}^6 \vec{E}_i, \quad \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{r} - \vec{r}_i') \cdot \vec{P}_m (\vec{r} - \vec{r}_i') - |\vec{P}_m|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|^5} \right]$$

$\vec{E}_i$ میدان حاصل از دو قطبی i ام است.

گشتاور دو قطبی مؤثر یک دو قطبی مولکولی عبارت است از مؤلفه آن در امتداد میدان $(P_0 \cos \theta)$ ، با استفاده از رابطه بولتزمن، مقدار میانگین این کمیت به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\langle P_0 \cos \theta \rangle = P_0 \left[\coth y - \frac{1}{y} \right], \quad y = \frac{P_0 E_m}{kT} \quad (۸-۵)$$

که به فرمول لانژون معروف است.

گشتاور دو قطبی مولکولی P_0 برای اکثر مواد قطبی طوری است که به ازای همه مقادیر شدت میدان، حتی به ازای شدتهای که نزدیک به استقامت ده الکتریک ماده‌اند، تا زمانی که دما بالاتر از $250^\circ K$ باشد،

داریم $y \ll 1$ - بنابراین هر ماده دی‌الکتریکی که شامل مولکول‌های قطبی باشد، عموماً خطی است، و به همین دلیل با بسط $\coth y$ به صورت سری نمایی نتیجه می‌شود که:

$$\langle P_0 \cos \theta \rangle \approx \frac{P_0^2 E_m}{3kT} \quad (۹-۵)$$

چون $\langle P_0 \cos \theta \rangle$ میانگین گشتاور دو قطبی مؤثر هر مولکول است، بنابراین قطبش مساوی با $P = N \langle P_0 \cos \theta \rangle$ و در جهت E_m خواهد بود.

$$\frac{1}{N} P = \frac{P_0^2 E_m}{3kT} \quad (۱۰-۵)$$

و بنابراین قطبش پذیری α (یعنی گشتاور دو قطبی مولکولی در واحد میدان قطبیده)، برابر است با:

$$\alpha = \frac{P_0^2}{3kt} \quad (۱۱-۵)$$

که در واقع α قطبش پذیری سمتگیری است. بنابراین قطبش پذیری مولکولی کلی برابر است با:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{P_0^2}{3kT} \quad (۱۲-۵)$$

که α_0 ، قطبش پذیری تغییر شکل است که ناشی از اثرات دو قطبی‌های القایی است.

مسائل فصل پنجم

۵-۱- (الف) با به کار بردن معادله کلاریوس - موساتی، قطبش پذیری اتم‌ها را در مولکول‌های هوا (یعنی N_2 و O_2) محاسبه کنید. [توجه کنید که از معادله (۱۰-۵) فقط میانگین وزنی قطبش پذیریهایی نیترژن و اکسیژن به دست می‌آید]. (ب) از ترکیب این نتیجه و نظریه بخش ۲-۵ شعاع متوسط اتم‌ها را در یک مولکول هوا محاسبه کنید.

حل: (الف)

$$\alpha = \frac{3\epsilon(k-1)}{N(k+2)} \quad (\text{معادله کلاریوس - موساتی})$$

$$\begin{cases} R_0 = 9/55 \times 10^{-11} \text{ (m)} \\ x = 2/6 \times 10^{-16} \text{ (m)} \end{cases} \Rightarrow x \ll R_0$$

۵-۴ (الف) با استفاده از بسط سری معروف e^y ، عبارت $\coth y$ را بسط دهید و معادله (۵-۲۲ الف) را از معادله (۵-۲۱) به دست آورید.
(ب) یک مرحله بیشتر جلو بروید و جمله دیگری از سری معادله (۵-۲۲ الف) را پیدا کنید.
حل: الف)

$$\langle P_0 \cos \theta \rangle = P_0 \left[\coth y - \frac{1}{y} \right] \quad (21-5)$$

$$\coth y = \frac{\cosh y}{\sinh y} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(2n+1)}}{(2n+1)!}} = \frac{1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots}{y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots} = \frac{1}{y} + \frac{y}{3} + \dots$$

$$\Rightarrow \langle P_0 \cos \theta \rangle = P_0 \left[\frac{1}{y} + \frac{y}{3} - \frac{1}{y} \right] = \frac{P_0 y}{3}$$

(ب) با انجام یک مرحله بیشتر تقسیم می توان جمله دیگری برای $\coth y$ بدست آورد، بنابراین:

$$\coth y = \frac{1}{y} + \frac{y}{3} - \frac{y^3}{45} + \dots$$

$$\langle P_0 \cos \theta \rangle = P_0 \left[\frac{1}{y} + \frac{y}{3} - \frac{y^3}{45} - \frac{1}{y} \right] = \frac{P_0 y}{3} - \frac{P_0 y^3}{45}$$

$$y = \frac{P_0 E_m}{KT} \Rightarrow \langle P_0 \cos \theta \rangle = \frac{P_0^2 E_m}{3KT} - \frac{P_0^3 E_m^3}{45 K^3 T^3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{P_0^2}{3KT} - \frac{P_0^3 E_m^3}{45 K^3 T^3}$$

۵-۵ آب مولکولی قطبی است که برای آن معادله کلازیوس-موساتی به درستی قابل کاربرد نیست. با وجود این، فرض کنید که این معادله در مورد آب صادق است و p_0 را برای مولکول آب محاسبه کنید.

حل:

$$\alpha = \frac{P_0^2}{3KT}, \alpha = 4\pi\epsilon_0 R_0^3 \Rightarrow P_0^2 = 12\pi\epsilon_0 KTR_0^3$$

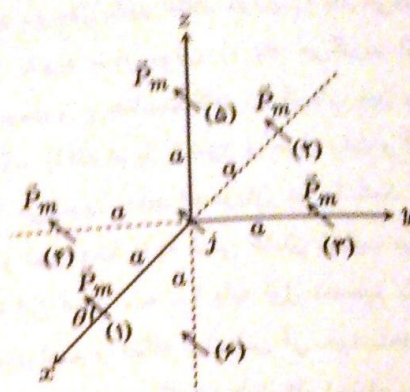
$$R_0 H_2O = 1/84 \times 10^{-10} \text{ (m)}, K = 1/38 \times 10^{-23} \text{ (ثابت بولتزمن)}$$

$$T = 300^\circ K$$

با جایگذاری اعداد داریم:

$$P_0^2 = 12\pi\epsilon_0 (1/38 \times 10^{-23}) \times 300 \times (1/84 \times 10^{-10})^3 = 8/60 \times 10^{-60}$$

$$\Rightarrow P_0 = 2/93 \times 10^{-30} \text{ (c.m)}$$



با توجه به شکل داریم:

$$\vec{P}_m = P_m \cos \theta \hat{i} + P_m \sin \theta \hat{k}, \quad \vec{r} = 0$$

$$\vec{r}_1 = a\hat{i}, \quad \vec{r}_2 = -a\hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r}(-a\hat{i}) \cdot \vec{P}_m(-a\hat{i})}{a^5} - \frac{\vec{P}_m}{a^3} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r P_m \cos \theta \hat{i}}{a^3} - \frac{\vec{P}_m}{a^3} \right]$$

$$\vec{r}_3 = a\hat{j} \Rightarrow \vec{r}_4 = -a\hat{j} \Rightarrow \vec{E}_3 = \vec{E}_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[0 - \frac{\vec{P}_m}{a^3} \right] = -\frac{\vec{P}_m}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

$$\vec{r}_5 = a\hat{k}, \quad \vec{r}_6 = -a\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_5 = \vec{E}_6 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r(-a\hat{k}) \cdot \vec{P}_m(-a\hat{k})}{a^5} - \frac{\vec{P}_m}{a^3} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r P_m \sin \theta \hat{k}}{a^3} - \frac{\vec{P}_m}{a^3} \right]$$

$$\vec{E}_j = \sum_{i=1}^6 \vec{E}_i = 2\vec{E}_1 + 2\vec{E}_3 + 2\vec{E}_5$$

$$= \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r P_m \cos \theta \hat{i}}{a^3} + \frac{r P_m \sin \theta \hat{k}}{a^3} - \frac{3\vec{P}_m}{a^3} \right]$$

$$= \frac{2}{4\pi\epsilon_0 a^3} [P_m \cos \theta \hat{i} + P_m \sin \theta \hat{k} - 3\vec{P}_m] = 0$$

۵-۳ (الف) با استفاده از نتیجه مسئله ۵-۱ برای قطبش پذیری اتم نیتروژن، جابه جایی هسته نیتروژن را نسبت به ابر الکترونی آن در میدانی به شدت $E_m = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ محاسبه کنید. (ب) این جابه جایی را با شعاع اتم که در مسئله ۵-۱ به دست آمد، مقایسه کنید.

حل: الف)

$$(1-5) \alpha_N = 9/7 \times 10^{-41}$$

$$P_m = Ze x = 4\pi\epsilon_0 R_0^3 E_m = \alpha E_m$$

$$\Rightarrow x = \frac{\alpha E_m}{Ze} = \frac{9/7 \times 10^{-41} \times 3 \times 10^6}{7 \times (1/6 \times 10^{-19})} = 2/6 \times 10^{-16} \text{ (m)}$$

(ب)

انرژی الکتروستاتیکی

چگالی انرژی میدان الکتروستاتیکی

انرژی الکتروستاتیکی دستگاه را می‌توان با یک تبدیل ریاضی (انتگرال گیری جزء به جزء) به نحو دیگری بیان کرد:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV \quad (۵-۶)$$

که در آن انتگرال بر روی جمعی از دستگاه گرفته می‌شود که خارج از رساناها واقع است، یعنی بر روی دی‌الکتریکهای مختلف موجود در دستگاه. ولی چون میدان الکتریکی $\vec{E}$ در داخل رساناها صفر است، می‌توان انتگرال گیری را به تمامی فضا گسترش داد.

علاوه بر این، معادله مذکور مشخص می‌کند که انرژی باید با چگالی $\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ در واحد حجم توزیع شده باشد، در واقع چگالی انرژی در میدان الکتروستاتیکی به صورت زیر است:

$$u = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (۶-۶)$$

چون معادله (۵-۶) را برای دی‌الکتریکهای خطی به دست آورده‌ایم، هر دی‌الکتریک با یک گذردهی ثابت ϵ مشخص می‌شود، و نیز بحث ما فقط به دی‌الکتریکهای همسانگرد محدود است، بنابراین:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \quad (۷-۶)$$

هنگامی که این فرمول بندی برای بارهای نقطه‌ای به کار می‌رود، «خود انرژی» نامتناهی آنها باید تفریق شود.

انرژی دستگاه رساناهای باردار. ضرایب پتانسیل.

در دستگاهی مرکب از N رسانا، پتانسیل هر یک از رساناها با معادله زیر داده می‌شود:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N P_{ij} Q_j \quad (۸-۶)$$

این معادله هم برای N رسانا در خلاء صادق است و هم وقتی دی‌الکتریک‌هایی نیز در دستگاه حضور داشته باشند، مشروط بر آنکه این دی‌الکتریک‌ها خطی و بدون بار خارجی باشند، صادق است.

انرژی پتانسیل گروهی از بارهای نقطه‌ای

انرژی الکتروستاتیکی گروهی مرکب از m بار نقطه‌ای، انرژی پتانسیل آنها نسبت به حالتی است که همه بارهای نقطه‌ای از یکدیگر بی‌نهایت دورند. به آسانی می‌توان این انرژی را با محاسبه مقدار کار لازم برای گرد هم آوردن بارها بدست آورد، بنابراین:

(۱-۶)

$$W_1 = 0, \quad W_2 = \frac{q_2 q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{21}} \rightarrow U = \sum_{j=1}^m W_j =$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_j q_k}{4\pi \epsilon_0 r_{jk}} \right)$$

و با در نظر گرفتن اینکه $W_{jj} = 0, W_{jk} = W_{kj}$ واضح است که می‌توانیم U را به صورت متقارن تر بنویسیم:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m W_{jk} \quad (W_{jj} = 0) \quad (۲-۶)$$

و با توجه به مقدار پتانسیل ϕ در محل j امین بار نقطه‌ای ناشی از سایر بارهای دستگاه، انرژی الکتروستاتیکی دستگاه عبارت است از:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m q_j \phi_j \quad (۳-۶)$$

این معادله نسبتاً اعتبار عمومی دارد، این معادله در مورد گروهی از بارهای نقطه‌ای که در محیط‌های دی‌الکتریکهای مختلفی قرار گرفته‌اند و حتی در مورد رساناهای با ابعاد متناهی نیز صادق است. تنها محدودیت در اعتبار این معادله این است که تمام دی‌الکتریک‌ها در دستگاه الکتریکی باید خطی باشند.

انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار

انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار دلخواه با چگالی حجمی ρ و چگالی سطحی σ ، که شامل رساناهاست، به صورت زیر است:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \phi da + \frac{1}{2} \sum_j Q_j \phi_j \quad (۴-۶)$$

جمع بندی آخر بر روی تمام رساناهاست و انتگرال سطحی به سطوح نارسانا منحصر است.

ضریب P_{ij} ، آن قسمت از پتانسیل i امین رساناست که از وجود بار واحد بر روی رسانای j ام ناشی می‌شود، را ضریب پتانسیل می‌نامند. بنابراین انرژی الکتروستاتیکی مجموعه‌ای از N رسانای باردار به صورت زیر است:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_{ij} Q_i Q_j \quad (9-6)$$

در واقع انرژی تابع درجه دومی از بارهای رساناهای مختلف است. نکته: سه حکم کلی و مهم را می‌توان در مورد ضرایب P_{ij} بیان کرد:

$$P_{ij} = P_{ji} \quad (1) \quad P_{ij} \geq P_{ij} \quad \text{همه } P_{ij} \text{ ها مثبت اند، } (2) \quad j \text{ هر چه باشد } (3)$$

ضرایب ظرفیت و ضرایب القا

معادله (۸-۶)، دستگاهی از N معادله خطی است که پتانسیل رساناها را برحسب بارهایشان به دست می‌دهد. این دستگاه معادلات را می‌توان برای تعیین بارهای Q_i (با وارونه کردن ماتریس) حل کرد:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_j \quad (10-6)$$

که در آن C_{ii} ضریب ظرفیت و C_{ij} ($i \neq j$) ضریب القا نامیده می‌شود، و خواص آنها به صورت زیر است:

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (1) \quad C_{ij} > 0 \quad (2) \quad \text{ضرایب القا صفر و یا منفی اند.} \quad (3)$$

با ترکیب این معادله با معادله (۳-۶)، انرژی الکتروستاتیکی دستگاهی مرکب از N رسانا به صورت زیر بدست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} \varphi_i \varphi_j \quad (11-6)$$

خازن‌ها

دو رسانا که بتوانند بارهای مساوی و مخالف ($\pm Q$) را در خود ذخیره کنند و اختلاف پتانسیل بین آنها به باردار بودن سایر رساناهای دستگاه بستگی نداشته باشد (پتانسیلی که بارهای دیگر در هریک از رساناهای این زوج رسانا ایجاد می‌کنند، باید یکسان باشد) وسیله‌ای را تشکیل می‌دهند که می‌تواند انرژی الکتروستاتیکی را در خود ذخیره کند، که خازن نامیده می‌شود.

ظرفیت خازن به صورت زیر بدست می‌آید:

$$C = \frac{Q}{\Delta \varphi} \quad (12-6)$$

در دستگاه mks ، ظرفیت خازن برحسب کولن بر ولت و یا فاراد ($1F = 1 \frac{C}{V}$) سنجیده می‌شود.

انرژی یک خازن باردار به صورت زیر است:

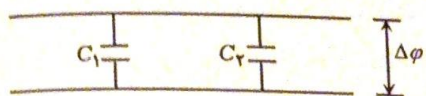
$$U = \frac{1}{2} Q \Delta \varphi = \frac{1}{2} C (\Delta \varphi)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (13-6)$$

ظرفیت خازنی تشکیل شده از دو صفحه موازی که مساحت هر یک A است و اختلاف پتانسیل آنها برابر $\Delta \varphi = Ed$ است، برابر است با:

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

دو یا چند خازن را می‌توان به همدیگر متصل کرد:

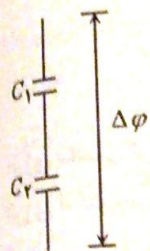
۱- روش موازی



در مورد این اتصال، همان ولتاژ $\Delta \varphi$ که در دو سر هر یک از خازن‌ها وجود دارد، در دو سر خازن معادل نیز موجود است، بنابراین ظرفیت خازن معادل به صورت زیر است:

$$C = C_1 + C_2$$

۲- روش متوالی



در صورتیکه دو خازن بدون بار به طور متوالی به یکدیگر بسته و سپس باردار شوند، پایداری بار ایجاب می‌کند که هر یک از خازن‌ها بار یکسانی به دست آورند، بنابراین ظرفیت خازن معادل برابر است با:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

نیروها و گشتاور نیروها

نیروی الکتریکی و گشتاور نیروی الکتریکی وارد بر قسمتی از یک دستگاه منزوی که هر رسانای آن باری ثابت دارد برابر است با منفی گرادیان انرژی الکتروستاتیکی

$$F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) Q, \quad \tau_1 = -\left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1}\right) Q$$

در صورتیکه دستگاه منزوی نباشد، ولی در عوض پتانسیل هر رسانا به وسیله یک عامل خارجی (باتری) ثابت نگه داشته شده باشد، نیرو و گشتاور نیرو به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$F_x = +\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \varphi, \quad \tau_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1}\right) \varphi$$

مسائل فصل ششم

۱-۶ - یک الکترون سریع ($5 \times 10^{-17} J$ انرژی جنبشی) به فضایی وارد می‌شود که دارای میدان الکتریکی یکنواخت $E = 800 V/m$ است. میدان موازی راستای حرکت الکترون و در جهتی است که حرکت آن را کند می‌کند. الکترون قبل از آنکه به حال سکون درآید چه فاصله‌ای را طی می‌کند؟ ($1/60 \times 10^{-19} C$ بار الکترون)
حل: با توجه به قضیه کار و انرژی:

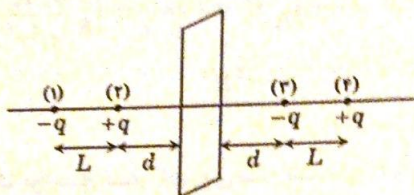
$$W = \Delta E_k$$

$$\vec{F} = -e\vec{E} \rightarrow -e\vec{E} \cdot \vec{x} = 0 - E_k \rightarrow eE_x = E_k \rightarrow x = \frac{E_k}{eE}$$

$$x = \frac{5 \times 10^{-17}}{1/60 \times 10^{-19} \times 800} = 0.391 (m)$$

در خلاء را در نظر بگیرید. بارهای تصویری را طوری انتخاب کنید که میدان E ی درست را در جلوی صفحه تولید کنند.

حل:



انرژی دستگاه برابر با انرژی دستگاهی متشکل از بارهای واقعی و بارهای تصویری در خلاء است.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j \varphi_j, \quad \varphi_j = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}}$$

پریم به منزله $k \neq j$ است، بنابراین:

$$\begin{aligned} U &= U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34} \\ &= \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (L+2d)} + \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 (2L+2d)} \\ &\quad + \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 (2d)} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2d+L)} + \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \\ &= \frac{-2q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{L} - \frac{1}{(L+2d)} + \frac{1}{2d} + \frac{1}{2(L+d)} \right] \end{aligned}$$

۴-۶ - یک پوسته کروی باردار به شعاع R و چگالی بار سطحی σ مفروض است. خود انرژی این توزیع را به دو روش محاسبه کنید:

(الف) با انتگرال گیری مستقیم از معادله (۸-۶)

(ب) با انتگرال گیری بر روی میدان، $\frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dv$

حل: الف) معادله (۸-۶):

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma \varphi da$$

و پتانسیل پوسته برابر است با:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{پوسته کروی}} \sigma \frac{\sigma R}{\epsilon_0} da = \frac{\sigma^2 R}{2\epsilon_0} \int da$$

$$= \frac{\sigma^2 4\pi R^2}{2\epsilon_0} = \frac{2\pi\sigma^2 R^2}{\epsilon_0}$$

(ب)

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV$$

و میدان الکتریکی برای دو ناحیه $r < R$ ، $r > R$ برابر است با:

$$r < R: E = 0$$

$$r > R: \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

۲-۶ - یک پوسته دی الکتریک کروی (به شعاع داخلی a ، شعاع خارجی b و ثابت دی الکتریک k) و یک بار نقطه ای q به فاصله بی نهایت از یکدیگر قرار دارند. بار نقطه ای را به مرکز پوسته دی الکتریک منتقل می کنیم. تغییر انرژی دستگاه را محاسبه کنید.

حل:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = U_2 \quad U_1 = 0$$

چون در ابتدا فاصله بین بار و پوسته دی الکتریک بی نهایت است، بنابراین انرژی کل دستگاه، U_1 ، برابر صفر است.

$$\Delta U = U_2 = \frac{1}{2} \int_{\text{کل فضا}} \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

بنابراین باید $\vec{D}$ و $\vec{E}$ را در سه ناحیه $r < a$ ، $a < r < b$ ، $r > b$ بدست آوریم:

$$r < a: \oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = q \rightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$a < r < b: \oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = q \rightarrow D 4\pi r^2 = q$$

$$\rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} = \frac{q}{4\pi(k\epsilon_0)r^2} \hat{r} \quad (\epsilon = k\epsilon_0)$$

$$r > b: \oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = q \rightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

بنابراین تغییر انرژی دستگاه به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \Delta U = U_2 &= \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \left[\int_0^a \epsilon_0 \frac{q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr \right. \\ &\quad \left. + \int_a^b (k\epsilon_0) \frac{q^2}{(4\pi)^2 (k\epsilon_0)^2 r^4} 4\pi r^2 dr + \int_b^\infty \frac{\epsilon_0 q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr \right] \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\int_0^a \frac{dr}{r^2} + \int_a^b \frac{dr}{kr^2} + \int_b^\infty \frac{dr}{r^2} \right] \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\left. -\frac{1}{r} \right|_0^a - \frac{1}{k} \left. \frac{1}{r} \right|_a^b + \left. \frac{1}{r} \right|_b^\infty \right] \end{aligned}$$

انتگرال اول به ازای حد پائین انتگرال (صفر)، بینهایت می شود، در واقع این خود انرژی نامتناهی بار نقطه ای است که آن را از جواب کنار می گذاریم:

$$\Delta U = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{a} - \frac{1}{k} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{b} \right] = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{(b-a)(1-k)}{kab} \right]$$

۳-۶ دو قطبی ql ، عمود بر صفحه ای رسانا قرار گرفته است به طوری که بار $-q$ در فاصله d و بار $+q$ در فاصله $d+l$ از صفحه واقع است. انرژی الکتروستاتیکی این دستگاه بار را محاسبه کنید. [راهنمایی: انرژی دستگاهی متشکل از بارهای واقعی به علاوه بارهای تصویری]

$$= \frac{\rho_0 \pi}{\epsilon_0} \int_0^R \left(\frac{-r^2}{3} + R^2 r^2 \right) dr = \frac{\rho_0 \pi}{\epsilon_0} \left[-\frac{r^3}{9} + \frac{R^2 r^3}{3} \right]_0^R$$

$$= \frac{\rho_0 \pi}{\epsilon_0} \left[-\frac{R^3}{9} + \frac{R^3}{3} \right] = \frac{2 \rho_0 \pi R^3}{9 \epsilon_0}$$

(ب)

$$\oint \vec{E}_{in} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{in} 4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow E_{in} = \frac{\rho_0 r}{3 \epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E}_{out} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{out} 4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow E_{out} = \frac{\rho_0 R^3}{3 \epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow E_{out} = \frac{\rho_0 R^3}{3 \epsilon_0 r^2}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\int_0^R E_{in}^2 dV + \int_R^\infty E_{out}^2 dV \right)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\int_0^R \frac{\rho_0^2 r^2}{9 \epsilon_0^2} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\rho_0^2 R^6}{9 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr \right] = \frac{2 \rho_0^2 \pi R^5}{15 \epsilon_0}$$

۶-۶- فرض کنید الکترون یک ذره کروی با بار یکنواخت به شعاع R باشد. باز هم فرض کنید که انرژی سکون mc^2 (جرم سکون الکترون و c سرعت نور است) منشأ الکتروستاتیکی دارد و با نتیجه مسئله ۶-۵ برابر است. با قرار دادن مقادیر عددی مناسب برای بار و جرم الکترون، شعاع کلاسیک الکترون، یعنی R را محاسبه کنید. حل: از مسئله ۵ داریم:

$$U = \frac{2 \pi R^5 \rho_0^2}{15 \epsilon_0}$$

$$\left. \begin{aligned} mc^2 &= U \\ \rho_0 &= \frac{e}{\frac{4}{3} \pi R^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow R = \frac{3 e^2}{20 \pi \epsilon_0 mc^2}$$

و با قرار دادن مقادیر عددی زیر:

$$\left. \begin{aligned} mc^2 &= 0.51 \text{ MeV} = 8.16 \times 10^{-14} \text{ J} \\ e &= 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \\ \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} &= 9 \times 10^9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R = 1.69 \times 10^{-15} \text{ m}$$

۶-۷- دو بار نقطه‌ای q_1, q_2 به فاصله d از یکدیگر قرار دارند. اگر میدان‌های مربوط به آنها در نقطه r به ترتیب E_1, E_2 باشند، در آن صورت

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + 2 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

(الف) نشان دهید که انتگرالهای E_1^2, E_2^2 بر تمامی فضا دیورژانس هستند. این همان «خود انرژی» نامتناهی است که باید از انرژی U کاسته شود.

$$= \frac{\sigma_0 4 \pi R^2}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma_0 R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\int_0^R E^2 dV + \int_R^\infty E^2 dV \right] = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^\infty \frac{\sigma_0^2 R^4}{\epsilon_0^2 r^4} 4 \pi r^2 dr$$

$$= \frac{2 \pi \sigma_0^2 R^4}{\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty = \frac{2 \pi \sigma_0^2 R^4}{\epsilon_0}$$

۶-۵- یک توزیع بار کروی به شعاع R و چگالی بار یکنواخت ρ_0 مفروض است. خود انرژی توزیع را به دو روش محاسبه کنید:

(الف) با انتگرال گیری مستقیم از معادله (۶-۸).

(ب) با انتگرال گیری بر روی میدان $\frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dv$

حل: (الف) با توجه به تقارن مسئله ϕ فقط تابعی از r است، بنابراین:

$$\nabla^2 \phi_{in} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{3 \epsilon_0} r^3 + A_1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{3 \epsilon_0} r + \frac{A_1}{r^2} \rightarrow \phi = -\frac{\rho_0}{6 \epsilon_0} r^2 - \frac{A_1}{r} + A_2$$

$$\nabla^2 \phi_{out} = 0 \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0$$

$$\rightarrow \phi_{out} = \frac{A'_1}{r} + A'_2$$

برای بدست آوردن ضرایب ثابت به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_{in} &= -\frac{\rho_0}{6 \epsilon_0} r^2 - \frac{A_1}{r} + A_2 & r=0 \rightarrow \phi=0 \rightarrow A_1=0 \\ \phi_{out} &= \frac{A'_1}{r} + A'_2 & \phi_{out}(r \rightarrow \infty) = 0 \rightarrow A'_2=0 \end{aligned} \right.$$

$$\phi_{in}(r=R) = \phi_{out}(r=R) \rightarrow -\frac{\rho_0}{6 \epsilon_0} R^2 + A_2 = \frac{A'_1}{R}$$

برای بدست آوردن A'_1 از قانون گاوس استفاده می‌کنیم:

$$\vec{E}_{out} = -\vec{\nabla} \phi_{out} = -\frac{A'_1}{r^2} \hat{r}$$

$$\oint \vec{E}_{out} \cdot \hat{n} da = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{A'_1}{r^2} 4 \pi r^2 = \frac{\rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow A'_1 = \frac{\rho_0 R^3}{3 \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho_0}{6 \epsilon_0} R^2 + A_2 = \frac{\rho_0 R^3}{3 \epsilon_0 R} \rightarrow A_2 = \frac{\rho_0 R^2}{2 \epsilon_0}$$

بنابراین پتانسیل برای $r < R$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\phi_{in} = -\frac{\rho_0}{6 \epsilon_0} r^2 + \frac{\rho_0 R^2}{2 \epsilon_0} \rightarrow U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV$$

$$= \frac{1}{2} \int \rho_0 \left[-\frac{\rho_0}{6 \epsilon_0} r^2 + \frac{\rho_0 R^2}{2 \epsilon_0} \right] 4 \pi r^2 dr$$

$$-\int \vec{\nabla} \phi_1 \cdot \vec{E}_2 dV = -\int \vec{\nabla} \cdot (\phi_1 \vec{E}_2) dV + \int \phi_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2 dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_2 = \rho_2 \Rightarrow \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2 = \rho_2$$

$$-\int \vec{\nabla} \phi_1 \cdot \vec{E}_2 dV = -\oint \phi_1 \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} + \frac{1}{\epsilon_0} \int \phi_1 \rho_2 dV$$

S ، کره‌ای به شعاع بینهایت است که بر روی این کره پتانسیل ϕ_1 صفر است، بنابراین انتگرال سطحی صفر می‌شود.

$$-\int \vec{\nabla} \phi_1 \cdot \vec{E}_2 dV = +\frac{1}{\epsilon_0} \int \phi_1 \rho_2 dV$$

چون ρ_2, q_1 صفر نیستند بنابراین این انتگرال یک انتگرال معین و همگراست.

۶-۸- (الف) ظرفیت خازنی که می‌تواند $1000J$ را در $1000V$ ذخیره کند، چقدر است؟

(ب) فرض کنید که خازن صفحاتی موازی و به فاصله $m \cdot 10^{-5}$ از یکدیگر دارد و با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک ϵ_r پر شده است. مساحت مورد نیاز صفحات چقدر است؟

حل: (الف)

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta\phi)^2 \Rightarrow 1000J = \frac{1}{2} C (1000)^2 \Rightarrow C = 0.002F$$

(ب)

$$C = \epsilon \frac{A}{d}, \quad \epsilon = k\epsilon_0 = 2\epsilon_0 \Rightarrow 0.002 = 2\epsilon_0 \frac{A}{10^{-5}} \Rightarrow$$

$$A = \frac{2 \times 10^{-3} \times 10^{-5}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 0.113 \times 10^2 m^2$$

۶-۹- دستگاه برق ساز (الکتروفورز) از صفحه‌ی مدور تختی از موم و صفحه‌ی مشابهی از فلز که دسته‌ای از جنس عایق دارد تشکیل شده است. به صفحه‌ی مومین، از طریق مالش آن با پارچه‌ی پشمی یا پوست، بار مقید Q داده می‌شود. پس صفحه‌ی فلزی روی صفحه‌ی مومین قرار داده می‌شود و موقتاً به زمین متصل می‌شود تا بار Q را بدست آورد. صفحه‌ی فلزی سرانجام از صفحه‌ی مومین جدا می‌شود و در عین حال با $(-Q)$ خود را حفظ می‌کند. فرض کنید که شعاع صفحات $10cm$ و $Q = 0.2\mu C$ و فاصله‌ی اولیه‌ی دو صفحه $m \cdot 10^{-5}$ باشد. اختلاف پتانسیل بین صفحات و انرژی ذخیره شده را هنگامی که فاصله بین دو صفحه (الف) $d = 10^{-5}m$ و (ب) $d = 0.2m$ است، پیدا کنید.

حل: (الف)

$$c = \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow c = \epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\pi \times (0.1)^2}{10^{-5}} = 2.78 \times 10^{-8} \quad F = 2.78 \times 10^{-2} \mu F$$

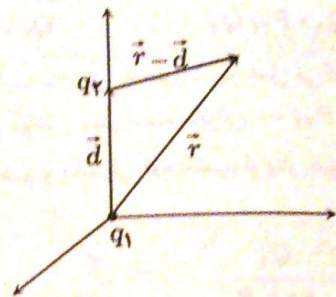
$$\Delta\phi = \frac{Q}{C} = \frac{0.2\mu C}{2.78 \times 10^{-2} \mu F} = 7.1(V)$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} C (\Delta\phi)^2 = \frac{1}{2} \times 2.78 \times 10^{-2} \times (7.1)^2 = 0.7(\mu J)$$

$$C' = \epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d'} = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\pi \times (0.1)^2}{0.2} = 1.39 \times 10^{-12} (F) \quad (ب)$$

(ب) انتگرالی برای سهم مربوط به $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ در U بنویسید و نشان دهید که این انتگرال دیورژانس نیست.

حل: (الف)



$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \Rightarrow E_1^2 = \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{q_1^2}{r^4}$$

$$\int E_1^2 dv = \frac{q_1^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{1}{r^4} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$= \frac{2\pi q_1^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0^2} \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_0^\infty = \infty$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{d}|^2} \Rightarrow E_2^2 = \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{q_2^2}{|\vec{r}-\vec{d}|^4}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{q_2^2}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^2}$$

$$\int E_2^2 dV = \frac{q_2^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{2\pi q_2^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{r^2 \sin\theta dr d\theta}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^2}$$

برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر $u = r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$u = r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta \rightarrow du = +2rd\sin\theta d\theta$$

$$\rightarrow \sin\theta d\theta = \frac{du}{2rd}$$

$$\int E_2^2 dV = \frac{q_2^2}{8\pi\epsilon_0^2} \int_0^\infty \int \frac{r^2 dr du}{2rd u^2}$$

$$= \frac{q_2^2}{8\pi\epsilon_0^2} \int_0^\infty \frac{r dr}{2d} \left(\frac{-1}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta} \right) \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{q_2^2}{16\pi d\epsilon_0^2} \int_0^\infty r dr \left[\frac{1}{(r^2 + d^2 - 2rd)} - \frac{1}{(r^2 + d^2 + 2rd)} \right]$$

$$= \frac{q_2^2}{16\pi d\epsilon_0^2} \left(\int_0^\infty \frac{r dr}{(r-d)^2} - \int_0^\infty \frac{r dr}{(r+d)^2} \right) = \infty$$

(ب)

$$\int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV = E_1 = -\vec{\nabla} \phi_1$$

$$\int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV = -\int \vec{\nabla} \phi_1 \cdot \vec{E}_2 dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi_1 \vec{E}_2) = \vec{\nabla} \phi_1 \cdot \vec{E}_2 + \phi_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2$$

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N P_{ij} Q_j \Rightarrow$$

حل:

$$\begin{cases} \varphi_1 = P_{11} Q_1 + P_{12} Q_2 \\ \varphi_2 = P_{21} Q_1 + P_{22} Q_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{بار القا شده روی کره} \\ \text{بار نقطه‌ای} \end{array}$$

برای مشخص کردن ضرایب پتانسیل به صورت زیر عمل می‌کنیم:
پتانسیل بار نقطه‌ای روی خودش صفر است، بنابراین $P_{22} = 0$
بار Q_2 را صفر قرار می‌دهیم و پتانسیل کره ناشی از بار خودش Q_1 صفر نیست، بنابراین:

$$\begin{cases} \varphi_1 = P_{11} Q_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R} \\ \varphi_2 = P_{21} Q_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (\text{پتانسیل حاصل از بار } Q_1 \text{ در نقطه } Q_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$P_{12} = P_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d}$$

پتانسیل کره صفر است، بنابراین:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} Q_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d} Q_2 = 0 \Rightarrow Q_1 = -\frac{R}{d} Q_2$$

۱۲-۶ - دستگاهی مرکب از دو جسم رسانا را در نظر بگیرید که در یک محیط دی‌الکتریک خطی قرار دارد. رسانای ۱ بار ندارد و رسانای ۲ به زمین متصل است. ثابت کنید پتانسیل رسانای ۱ نیز با پتانسیل زمین برابر است.

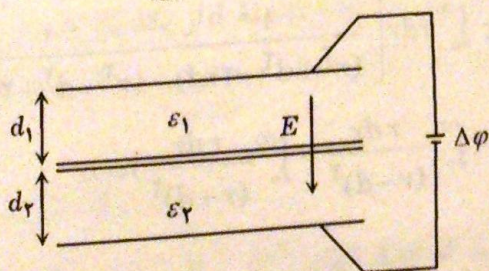
حل: طبق فرض مسئله: $\varphi_2 = 0$ ، $Q_1 = 0$ بنابراین:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij} \cdot Q_j \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = P_{11} Q_1 + P_{12} Q_2 = P_{12} Q_2 & (1) \\ \varphi_2 = P_{21} Q_1 + P_{22} Q_2 = 0, P_{22} \neq 0 \Rightarrow Q_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \varphi_1 = 0$$

۱۳-۶ - خازنی با صفحات موازی با یک دی‌الکتریک مرکب ساخته شده است. ورقه‌ای از یک دی‌الکتریک با گذردهی ϵ_1 و ضخامت d_1 در بالای ورقه دی‌الکتریک دیگری با گذردهی ϵ_2 و ضخامت d_2 قرار داده شده است. ترکیب این دو دی‌الکتریک بین دو صفحه موازی رسانا قرار گرفته است که فاصله آنها از یکدیگر $d_1 + d_2$ است ظرفیت خازن را در واحد سطح صفحات آن به دست آورید.



حل:

$$\Delta\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \Delta\varphi = E_1 d_1 + E_2 d_2 \quad (1)$$

از قانون گاوس و سطح گاوسی مکعبی داریم:

$$\Delta\varphi = \frac{Q}{C} = \frac{0.3 \times 10^{-6}}{13/9 \times 10^{-12}} = 2/2 \times 10^4 \text{ (V)}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} C (\Delta\varphi)^2 = 3/4 \times 10^{-3} \text{ (J)} = 3/4 \text{ (mJ)}$$

۱۰-۶ - دستگاهی متشکل است از تنها دو رسانا. ضرایب ظرفیت و القا را صریحاً بر حسب ضرایب پتانسیل P_{ij} به دست آورید.

حل: با استفاده از روش ماتریسی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \varphi_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij} Q_j \rightarrow \varphi = P Q \\ Q_i = \sum_{j=1}^2 C_{ij} \varphi_j \rightarrow Q = C \varphi \end{cases} \Rightarrow C = P^{-1} \quad (1)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} P_{22} & -P_{12} \\ -P_{21} & P_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} \begin{bmatrix} P_{22} & -P_{12} \\ -P_{21} & P_{11} \end{bmatrix} \quad (2)$$

از (۱)، (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$C_{11} = \frac{-P_{22}}{(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})}$$

$$C_{12} = \frac{-P_{12}}{(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})}$$

$$C_{21} = \frac{-P_{21}}{(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})}$$

$$C_{22} = \frac{P_{11}}{(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})}$$

همچنین می‌توان این ضرایب را به صورت زیر بدست آورد:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij} \cdot Q_j \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = P_{11} Q_1 + P_{12} Q_2 \\ \varphi_2 = P_{21} Q_1 + P_{22} Q_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^2 C_{ij} \varphi_j \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = C_{11} \varphi_1 + C_{12} \varphi_2 \\ Q_2 = C_{21} \varphi_1 + C_{22} \varphi_2 \end{cases} \quad (2)$$

معادلات (۱) را برای Q_1, Q_2 حل می‌کنیم و با مقایسه با معادلات (۲)، ضرایب C ها به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$Q_1 = \frac{P_{22}}{(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})} \varphi_1 + \frac{-P_{12}}{(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})} \varphi_2$$

$$Q_2 = \frac{-P_{21}}{(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})} \varphi_1 + \frac{P_{11}}{(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})} \varphi_2$$

۱۱-۶ - دو رسانای کروی در خلاء قرار دارند. رسانای ۱ به شعاع R به زمین متصل است (یعنی پتانسیل آن صفر است) رسانای ۲ به قدری کوچک است که می‌توان آن را یک بار نقطه‌ای تصور کرد. بار این رسانا q است و به فاصله d از کره متصل به زمین قرار دارد. چه مقدار بار روی کره متصل به زمین القا می‌شود؟ (از مفهوم ضرایب پتانسیل استفاده کنید.)

$$C_1' = \epsilon_0 \frac{A}{(d-t)}, \quad C_2' = \epsilon \frac{A}{t} \Rightarrow C_2 = \frac{C_1' C_2'}{C_1' + C_2'} \quad (1)$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon \frac{A^2}{t(d-t)}}{\epsilon_0 \frac{A}{d-t} + \epsilon \frac{A}{t}} = \frac{k \epsilon_0 A}{t + k(d-t)}$$

همچنین خازنهای C_1, C_2 با یکدیگر متوالی هستند، بنابراین ظرفیت خازن معادل آنها برابر است با:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(\epsilon_0 \frac{A}{d}) \times (\frac{k \epsilon_0 A}{t + k(d-t)})}{(\epsilon_0 \frac{A}{d}) + (\frac{k \epsilon_0 A}{t + (d-t)k})} = \frac{k \epsilon_0 A}{t(1-k) + \epsilon dk} \quad (2)$$

دو خازن C_1, C_2 با یکدیگر متوالی هستند بنابراین:

$$Q_1 = Q_2 = Q_{\text{کل}} \Rightarrow Q_2 = Q_{\text{کل}} \Rightarrow C_2 \Delta \phi_2 = C \Delta \phi \quad (3)$$

با جایگذاری روابط (1)، (2) در رابطه (3) داریم:

$$\frac{k \epsilon_0 A}{t + k(d-t)} \Delta \phi_2 = \frac{k \epsilon_0 A}{\epsilon dk + (1-k)t} \Delta \phi \Rightarrow$$

$$\Delta \phi_2 = \frac{kd + (1-k)t}{\epsilon kd + (1-k)t} \Delta \phi$$

$$\Delta \phi = \Delta \phi_2, \quad t = \frac{d}{10}, \quad k = 10$$

$$\Delta \phi_2 = \frac{10d - 0.9d}{10d - 0.9d} \Delta \phi = \frac{9.1}{19.1} \Delta \phi = 0.476 \Delta \phi \quad (V)$$

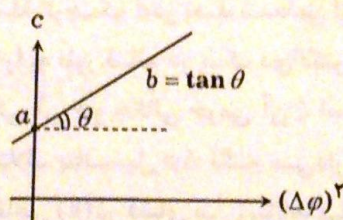
۱۶-۶ - ظرفیت یک الکتروسکوپ با برگه طلا کاملاً ثابت نیست، زیرا وقتی $\Delta \phi$ افزایش یابد، برگه به طرف محفظه نزدیکتر می‌شود.

ظرفیت مورد نظر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$C = a + b(\Delta \phi)^2$$

چگونه می‌توانید ثابت‌های a, b را برای یک دستگاه بخصوص تعیین کنید؟ هنگامی که الکتروسکوپ باردار است، انرژی آن چقدر است؟ آیا این انرژی تماماً الکتریکی است؟

حل: الف) می‌توان به الکتروسکوپ بارهای متفاوت داد و $\Delta \phi, C$ را محاسبه کرد و با ترسیم نمودار C بر حسب $(\Delta \phi)^2$ ، a, b به ترتیب عرض از مبدا و شیب نمودار حاصل هستند.



$$U = \frac{1}{2} C (\Delta \phi)^2 = \frac{1}{2} [a + b(\Delta \phi)^2] (\Delta \phi)^2 \quad (ب)$$

$$= \frac{1}{2} a (\Delta \phi)^2 + \frac{1}{2} b (\Delta \phi)^4$$

ج) انرژی تماماً الکتریکی نیست، زیرا مقداری از انرژی مربوط به گشتاور است.

۱۷-۶ - دو پوستهٔ رسانای کروی هم مرکز به شعاع‌های r_1, r_2 را به ترتیب در پتانسیل‌های ϕ_1, ϕ_2 نگه داشته‌ایم فضای بین دو پوسته را

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \Rightarrow DA = Q \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 E_1 A = Q \Rightarrow E_1 = \frac{Q}{\epsilon_1 A} \\ \epsilon_2 E_2 A = Q \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{\epsilon_2 A} \end{cases} \quad (2)$$

از ترکیب روابط (1)، (2)، $\Delta \phi$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta \phi = \frac{Q}{\epsilon_1 A} d_1 + \frac{Q}{\epsilon_2 A} d_2$$

بنابراین ظرفیت خازن در واحد سطح:

$$\frac{C}{A} = \frac{Q}{A \Delta \phi} = \frac{Q}{A \left[\frac{Q}{\epsilon_1 A} d_1 + \frac{Q}{\epsilon_2 A} d_2 \right]} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}$$

۱۴-۶ - استوانه‌ای طویل و رسانا به شعاع a به موازات یک صفحه رسانای نامتناهی و به فاصله h از آن قرار دارد. نشان دهید که ظرفیت دستگاه در واحد طول استوانه با رابطه زیر داده می‌شود.

$$C = 2\pi \epsilon_0 / \cosh^{-1}(h/a)$$

(به بخش (۳-۱۰) رجوع شود.)

حل: با توجه به مسئله (۳-۲۱) داریم:

$$M = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - a^2}}{a} \quad M < 1$$

$(x_0 \rightarrow h)$

$$\phi_M = \frac{-\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln M = \frac{-\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \left(\frac{h - \sqrt{h^2 - a^2}}{a} \right)$$

$$= \frac{-\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \left(\frac{h}{a} - \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1} \right)$$

$$\cosh^{-1} hx = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

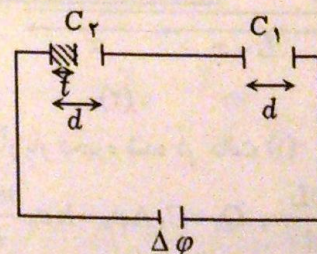
$$\phi_M = \frac{-\lambda}{2\pi \epsilon_0} \cosh^{-1} \left(\frac{h}{a} \right)$$

$$C = \frac{Q}{|\Delta \phi|} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \cosh^{-1} \left(\frac{h}{a} \right)} = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\cosh^{-1} \left(\frac{h}{a} \right)}$$

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\cosh^{-1} \left(\frac{h}{a} \right)}$$

۱۵-۶ - دو خازن مشابه را که بین صفحات آنها هواست، به صورت متوالی به هم وصل می‌کنیم و ترکیب حاصل را در اختلاف پتانسیل ثابت ۵۰۷ نگه می‌داریم. اگر یک ورقه دی‌الکتریک را که ثابت دی‌الکتریک آن ۱۰ و ضخامتش یک دهم فاصله صفحات است، در داخل یکی از خازن‌ها قرار دهیم، اختلاف پتانسیل دوسرین خازن را محاسبه کنید.

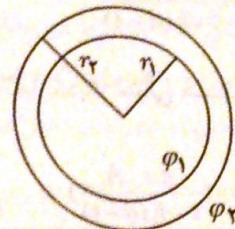
حل:



خازن C_2 ، متشکل از دوخازن متوالی است بنابراین ظرفیت خازن آن برابر است با:

از یک ماده دی‌الکتریک پر کرده‌ایم. با محاسبه مستقیم نشان دهید که انرژی ذخیره شده در دی‌الکتریک برابر است با $\frac{1}{2}C(\phi_1 - \phi_2)^2$ و در نتیجه C یا ظرفیت دستگاه را تعیین کنید.

حل:



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q \Rightarrow D \pi r^2 = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{\pi r^2}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \int D^2 dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{Q}{\pi r^2} \right)^2 \pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\pi} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{Q^2}{2} \left[\frac{1}{\pi \epsilon r_1} - \frac{1}{\pi \epsilon r_2} \right]$$

$$= \frac{Q^2}{2} [\phi_1 - \phi_2] \quad (1)$$

$$Q = C(\phi_1 - \phi_2) \quad (2)$$

از روابط (1) و (2) داریم:

$$U = \frac{1}{2} C(\phi_1 - \phi_2)^2 \quad (3)$$

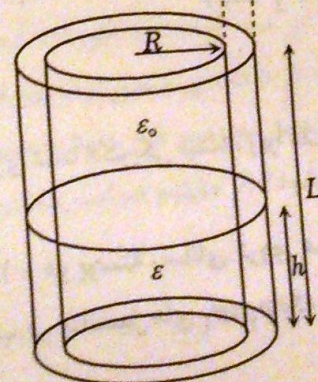
از روابط (1) و (3) داریم:

$$U = \frac{1}{2} C(\phi_1 - \phi_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\pi \epsilon} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{C^2 (\phi_1 - \phi_2)^2}{\pi \epsilon} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \Rightarrow C = \frac{\pi \epsilon}{\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]}$$

۱۸-۶ - دو رسانای استوانه‌ای هم محور که شعاع آنها تقریباً یکی است، به اندازه فاصله کوچک d در بعد شعاعی از یکدیگر جدا هستند. استوانه‌ها را به طور قائم در یک دی‌الکتریک مایع که پذیرفتاری الکتریکی آن χ و چگالی جرمی آن ξ است، فرو می‌بریم. استوانه‌ها را در اختلاف پتانسیل $\Delta\phi$ نگه می‌داریم. مایع دی‌الکتریک تا چه ارتفاعی (h) در فضای بین رساناها بالا می‌آید؟ (از کشش سطحی صرف‌نظر کنید)

حل:



با توجه به اینکه شعاع استوانه‌ها تقریباً یکسان هست، می‌توانیم خازن‌ها را به صورت تخت در نظر بگیریم، بنابراین ظرفیت معادل برابر است با:

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon \frac{\pi R h}{d} + \frac{\epsilon_0 \pi R (L-h)}{d}$$

انرژی الکتروستاتیکی خازن برابر است با:

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta\phi)^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon \pi R h}{d} + \frac{\epsilon_0 \pi R (L-h)}{d} \right] (\Delta\phi)^2$$

مایع تا جایی بالا می‌آید که نیروی الکتریکی با نیروی وزن قسمت بالا آمد برابر شود، بنابراین:

$$F_E = \left(\frac{\partial U}{\partial h} \right)_{\phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon \pi R}{d} - \frac{\epsilon_0 \pi R}{d} \right] (\Delta\phi)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi R}{d} (\epsilon - \epsilon_0) (\Delta\phi)^2 = \frac{\pi R}{d} x (\Delta\phi)^2$$

$$F_g = \xi (\pi R h d) g$$

$$F_E = F_g \Rightarrow \frac{\pi R}{d} x (\Delta\phi)^2 = \xi (\pi R h d) g \Rightarrow$$

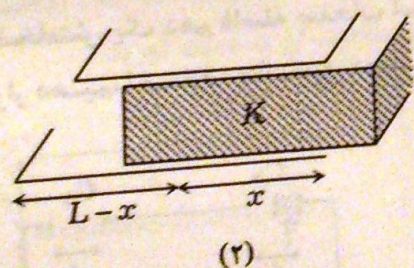
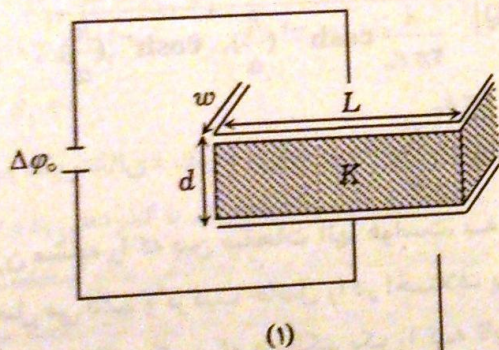
$$h = \frac{\chi}{\xi g} \left(\frac{\Delta\phi}{d} \right)^2$$

۱۹-۶ - فضای بین صفحات خازنی با صفحات موازی به وسیله بره دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک k پر شده است. ابعاد صفحه خازن عبارتند از عرض w و طول L و فاصله صفحات d . خازن را در حالی که به منبعی با اختلاف پتانسیل $(\Delta\phi)_0$ متصل است بردار و سپس آن را از منبع جدا می‌کنیم. حال قسمتی از بره دی‌الکتریک را در امتداد بعد L بیرون می‌کشیم به طوری که فقط طول x از آن در داخل خازن باقی بماند.

(الف) اختلاف پتانسیل بین صفحات خازن چقدر است؟

(ب) نیرویی که می‌خواهد بره دی‌الکتریک را دوباره به داخل خازن بکشد چقدر است؟

حل:



(الف) ظرفیت خازن و مقدار بار ذخیره شده در حالت (۱):

$$C_1 = \epsilon \frac{A}{d} = k \epsilon_0 \frac{wL}{d}, \quad Q_1 = C_1 \Delta\phi_0 = k \epsilon_0 \frac{wL}{d} \Delta\phi_0$$

در حالت (۲):

$$D_{\text{free}} - D_{\text{in}} = \sigma_{\text{free}} = \epsilon_r E_{\text{free}} - \epsilon_1 E_{\text{in}} = \sigma_{\text{free}}$$

$$E_{\text{free}} - E_{\text{in}} = \frac{\sigma_{\text{total}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{free}} + \sigma_{\text{total}}}{\epsilon_0}$$

پوسته رساناست و میدان در درون رسانا صفر است.

$$\epsilon_r E_{\text{free}} = \sigma_f \Rightarrow \begin{cases} E_{\text{free}} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} & \text{در سطح نیمکره بالایی} \\ E_{\text{free}} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} & \text{در سطح نیمکره پایینی} \end{cases} \quad (۴)$$

$$(\text{۳}), (\text{۴}) \Rightarrow \vec{F}_E = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\sigma_f}{r^2} \hat{r} da + \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\sigma_f}{r^2} \hat{r} da$$

نیمکره بالایی نیمکره پایینی

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

دوجمله اول صفر می شوند بعلاقی تقارن سمتی پس داریم:

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$$

$$F_E = \frac{k}{\epsilon_0} \int_{\text{up}} \frac{\sigma_f}{r^2} \cos \theta \sin \theta d\phi R^2 + \frac{k}{\epsilon_0} \int_{\text{up}} \frac{\sigma_f}{r^2} \cos \theta \sin \theta d\phi R^2 \quad (۵)$$

حال σ_f از σ نیز مستقل است.

$$\int_{\text{up}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\text{down}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \quad (۶)$$

$$\vec{F}_E = \frac{k R^2 \pi}{\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_f)_{\text{up}} - \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_f)_{\text{down}} \right\}$$

حال σ_f ها را محاسبه می کنیم.

$$\nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \phi = A + \frac{B}{r}$$

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \phi|_{r=R} = \frac{B}{R} = \phi_0 \Rightarrow B = \phi_0 R$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\phi_0 R}{r} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \phi \Rightarrow E = \frac{\phi_0 R}{r^2} r \Rightarrow Er = \frac{\phi_0 R}{r}$$

$$\begin{cases} (\sigma_f)_{\text{up}} = \epsilon_0 Er|_{r=R} = \epsilon_0 \frac{\phi_0 R}{R} \\ (\sigma_f)_{\text{down}} = \epsilon_0 Er|_{r=R} = \epsilon_0 \frac{\phi_0 R}{R} = k \epsilon_0 \frac{\phi_0}{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_E = \frac{k \pi R^2}{\epsilon_0} \left(\frac{\phi_0}{R} \right) \epsilon_0 (1-k)$$

$$= \frac{k \pi \epsilon_0}{\epsilon_0} \phi_0^2 (1-k) \quad (۷)$$

$$(\text{۷}), (\text{۷}) \Rightarrow \vec{F}_E = m \vec{g} = \frac{k \pi \epsilon_0 \phi_0^2 (1-k)}{\epsilon_0}$$

$$g = -gk \Rightarrow \phi_0 = \left[\frac{+ \pi m g}{\pi \epsilon_0 (-1+k)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

۲۲-۶ - یک تیغه دی الکتریک به ضخامت d و ثابت دی الکتریک k فضای بین صفحات خازنی با صفحات موازی را پر کرده است. مساحت صفحه خازن A است. نیروی الکتروستاتیکی وارد بر یکی از صفحات را برای دو مورد زیر محاسبه کنید: (الف) با فرض اینکه دی الکتریک

$$Q_2 = Q_1, \quad C_2 = C_1' + C_2' = \epsilon_0 \frac{w(L-x)}{d} + k \epsilon_0 \frac{wx}{d}$$

$$\Delta \phi_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1}{C_2} = \frac{k \epsilon_0 \frac{wL}{d} \Delta \phi_0}{\epsilon_0 \frac{w(L-x)}{d} + k \epsilon_0 \frac{wx}{d}} = \frac{kL \Delta \phi_0}{kx + (L-x)}$$

$$U = \frac{1}{2} C_2 (\Delta \phi_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 w}{d} [(L-x) + kx] \left[\frac{kL \Delta \phi_0}{kx + (L-x)} \right]^2$$

$$= \frac{\epsilon_0 w}{2d} \frac{k^2 L^2 \Delta \phi_0^2}{(k-1)x + L} = \frac{Q_1^2 d}{2 \epsilon_0 w} [(k-1)x + L]^{-1}$$

$$F_x = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{Q_1^2 d}{2 \epsilon_0 w} \frac{(k-1)}{[(k-1)x + L]^2}$$

۲۰-۶ - ظرفیت یک خازن متغیر که بین صفحات آن هواست،

هنگامی که یکی از صفحات آن از 0° تا 180° بچرخد به طور خطی از

50 pf تا 364 pf تغییر می کند صفحه چرخان را در زاویه 75°

تنظیم کرده و دو سر خازن را در اختلاف پتانسیل برابر با 400 ولت نگه

می داریم. جهت و اندازه گشتاور نیروی الکتروستاتیکی وارد بر

صفحه خازن را پیدا کنید.

حل: ظرفیت خازن با زاویه به طور خطی تغییر می کند، بنابراین:

$$C - 50 = \frac{364 - 50}{180 - 0} (\theta - 0) \Rightarrow C = \frac{314}{180} \theta + 50$$

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta \phi)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{314}{180} \theta + 50 \right) (400)^2$$

$$\tau = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{314}{180} \right) (400)^2 = 139555.6$$

گشتاور نیروی الکتروستاتیکی در جهت افزایش θ است.

۲۱-۶ - یک پوسته رسانای کروی، بدون بار به جرم m ، و در یک

دی الکتریک مایع با ثابت دی الکتریک K شناور است، به طوری که

یک چهارم حجم آن در مایع غوطه ور است. تا چه پتانسیلی باید کره

را باردار کنیم تا نیمی از حجم آن غوطه ور شود؟ (راهنمایی: فرض

کنید میدان الکتریکی پوسته باردار که تا نیمه غوطه ور است، یک

میدان شعاعی خالص باشد و بعداً نشان دهید که جمع $\sigma + \sigma_p$ روی

سطح کره به گونه ای است که فرض بالا را تایید می کند.)

حل:

اگر ρ چگالی جرمی مایع و V حجم کره باشد داریم:

$$F_A = \rho \left(\frac{1}{4} V \right) = mg \Rightarrow \rho V = 4mg \quad (۱)$$

$$F'_A = \rho \left(\frac{1}{4} V \right) \Rightarrow F'_A = 4mg \quad (۱)$$

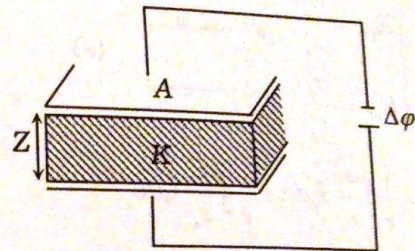
$$F'_A = F_E + F_{mg} = 4mg \Rightarrow F_E = F_{mg} \quad (۲)$$

$$\vec{F}_E = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma \vec{E} da \quad (۳)$$

در رابطه (۳) $\vec{E}$ ، میدان در نزدیکی سطح کره رساناست و $\vec{E} = E_r \hat{r}$ لذا باید داشته باشیم:

مستقیماً با آن صفحه در تماس باشد و (ب) با فرض اینکه بین دی الکتریک و آن صفحه شکاف باریکی از هوا وجود داشته باشد. در هر دو مورد صفحات را در اختلاف پتانسیل $\Delta\phi$ نگه می داریم.

حل: الف)

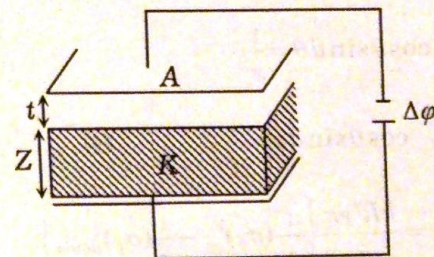


$$C = \epsilon \frac{A}{Z} = k\epsilon_0 \frac{A}{Z}, \quad U = \frac{1}{2} C (\Delta\phi)^2 = \frac{1}{2} k\epsilon_0 \frac{A}{Z} (\Delta\phi)^2$$

$$F_Z = \left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right)_{\phi} = \frac{-k\epsilon_0 A (\Delta\phi)^2}{2Z^2} \Rightarrow F_Z = -\frac{1}{2} \frac{C^2 \Delta\phi^2}{kA\epsilon_0}$$

$$C^2 = k^2 \epsilon_0^2 \frac{A^2}{Z^2} \Rightarrow Z^2 = \frac{k^2 \epsilon_0^2 A^2}{C^2} \Rightarrow Z = \frac{k\epsilon_0 A}{C}$$

ب)



با توجه به شکل، خازن تشکیل شده از دو خازن که به صورت سری اتصال پیدا کرده اند:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{A}{t}, \quad C_2 = k\epsilon_0 \frac{A}{Z}$$

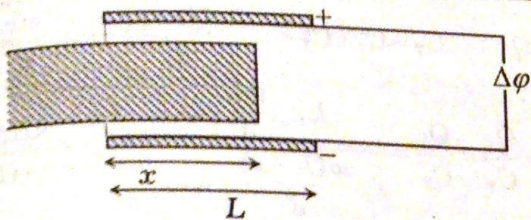
$$C = \frac{k\epsilon_0 \frac{A^2}{Zt}}{k\epsilon_0 \frac{A}{Z} + \epsilon_0 \frac{A}{t}} = \frac{k\epsilon_0 A}{kt + Z}$$

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta\phi)^2 \Rightarrow F_Z = \frac{1}{2} (\Delta\phi)^2 \left(\frac{\partial C}{\partial Z} \right)$$

$$F_Z = \left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right)_{\phi} = \frac{1}{2} (\Delta\phi)^2 \frac{-k\epsilon_0 A}{(kt + Z)^2}$$

۲۳-۶ - مثال مربوط به شکل ۴-۶ را با انرژی الکتروستاتیکی به صورت $U = \frac{1}{2} C (\Delta\phi)^2$ حل کنید، در اینجا $C = C(x)$ ظرفیت خازن است هنگامی که قطعه دی الکتریک تا فاصله x فرورفته است.

حل:



با توجه به شکل، خازن متشکل از دو خازن است که با یکدیگر اتصال موازی دارند. بنابراین:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 w (L-x)}{d} + \frac{k\epsilon_0 wx}{d}$$

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta\phi)^2 \Rightarrow F_x = \frac{1}{2} (\Delta\phi)^2 \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\phi}$$

$$F_x = \frac{1}{2} (\Delta\phi)^2 \left[\frac{k\epsilon_0 w}{d} - \frac{\epsilon_0 w}{d} \right] = \frac{1}{2} \frac{w (\Delta\phi)^2}{d} (\epsilon - \epsilon_0)$$

۲۴-۶ - فرض کنید انرژی الکتروستاتیکی دستگاهی $U = \frac{1}{2} Q \Delta\phi$ است که در آن $Q = C \Delta\phi$ ظرفیت را به صورت $C = C(x)$ که به پارامتر هندسی x بستگی دارد، در نظر بگیرید. در اینجا پارامتر x مکان قسمتی از دستگاه را مشخص می کند. نشان دهید که نیروی وارد بر آن قسمت برای مقدار بخصوصی از Q ، $\Delta\phi$ طبق معادله (۶-۴۱) با $\Delta\phi$ ی ثابت یکسان است.

حل:

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta\phi, \quad Q = C \Delta\phi \Rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)}$$

$$F_x = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{Q} = - \frac{1}{2} Q^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C(x)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} Q^2 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2} (\Delta\phi)^2 \frac{\partial C}{\partial x} \quad (1)$$

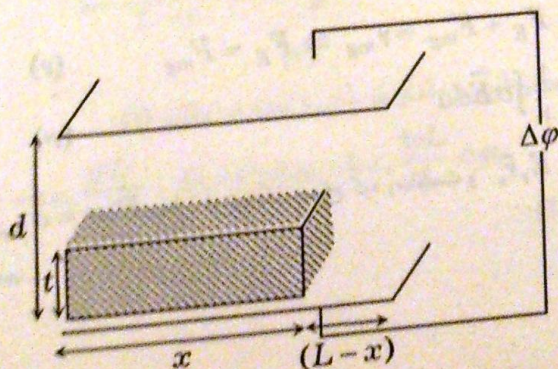
$$U = \frac{1}{2} Q \Delta\phi, \quad Q = C \Delta\phi \Rightarrow U = \frac{1}{2} C (\Delta\phi)^2 = \frac{1}{2} C(x) (\Delta\phi)^2$$

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\phi} = \frac{1}{2} (\Delta\phi)^2 \frac{\partial C}{\partial x} \quad (2)$$

بنابراین روابط (۱)، (۲) با یکدیگر برابر هستند.

۲۵-۶ - مثال مربوط به شکل ۴-۶ را چنانچه ضخامت t ی سر دی الکتریک از فاصله d ی بین صفحات بسیار کمتر باشد حل کنید. (راهنمایی: در این حالت، بنابر نتیجه مسئله ۴-۱۵، D در تمامی فضای بین صفحات تقریباً یکسان است، نه E .)

حل:



$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dv = \frac{1}{2} \epsilon \int E^2 dv \\
 &= \frac{\epsilon}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\lambda}{2\pi \epsilon r} \right)^2 r dr d\theta dz \\
 &= \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\lambda}{2\pi \epsilon} \right)^2 (2\pi l) \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda^2 l}{4\pi \epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(\lambda l)^2}{C} \\
 \Rightarrow C &= \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{2\pi \epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}}
 \end{aligned}$$

۶-۲۷ - حداکثر بار Q که یک خازن می‌تواند ذخیره کند، هم توسط ظرفیت خازن و هم توسط استقامت دی‌الکتریک ماده دی‌الکتریک، یعنی $E_{\max}$ (به جدول ۴-۱ رجوع شود) تعیین می‌شود. (الف) $Q_{\max}$ را برحسب ϵ و $E_{\max}$ برای خازنی با صفحات موازی تعیین کنید. (ب) کدام دی‌الکتریک، اکسید آلومینیم یا شیشه، بار بیشتری در خازنی با صفحات موازی و مساحت صفحات یکسان، ذخیره می‌کنند؟

حل: الف)

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{\max} &= C \Delta \phi_{\max} \\
 \Delta \phi_{\max} &= d E_{\max} \\
 C &= \epsilon \frac{A}{d}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_{\max} = C(d E_{\max}) = \left(\frac{\epsilon A}{d} \right) (d E_{\max}) = \epsilon A E_{\max} \quad (1)$$

ب) حداکثر میدان الکتریکی که یک دی‌الکتریک می‌تواند تحمل کند بی‌آنکه در هم بشکند، استقامت دی‌الکتریک نامیده می‌شود. از رابطه (۱) مشخص است که هرچه $E_{\max}$ برای ماده دی‌الکتریک بیشتر باشد توانایی ذخیره بار بیشتری به خازن می‌دهد. طبق جدول (۴-۱) داریم:

$$E_{\max} = 9 \times 10^6 \text{ شیشه}$$

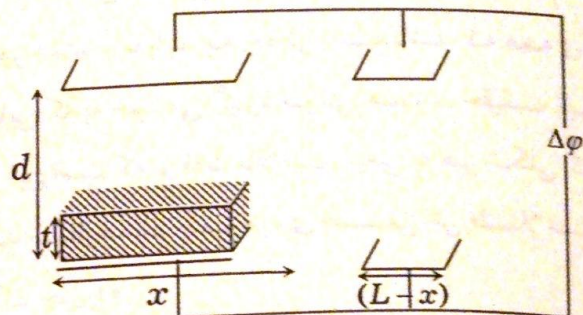
$$E_{\max} = 6 \times 10^6 \text{ اکسید آلومینیم}$$

با توجه به مطالب بالا، شیشه $E_{\max}$ بزرگتری دارد، بنابراین توانایی ذخیره بار بیشتری به خازن می‌دهد.

۶-۲۸ - الف) با استفاده از روش گشتاورها که در بخش ۳-۱۲ توضیح داده شده، ظرفیت خازنی با صفحات مربعی را محاسبه کنید. حداقل آرایه‌های 1×1 ، 2×2 ، 3×3 ، 4×4 را انجام دهید. (ب) نتایج را با ظرفیت به دست آمده از تقریب صفحه نامتناهی مقایسه کنید.

حل: صورت سؤال غلط و حل این مسأله از روش خواسته شده ممکن نیست.

با توجه به شکل، خازن متشکل از دو خازن C_1 و C_2 است که با هم به صورت موازی متصل شده‌اند:



$$C_{\text{total}} = C_1 + C_2 \quad C_1 = \epsilon_0 \frac{w(L-x)}{d}$$

با توجه به شکل خازن C_2 نیز تشکیل شده از دو خازن C'_1 و C'_2 که به یکدیگر سری شده‌اند، بنابراین:

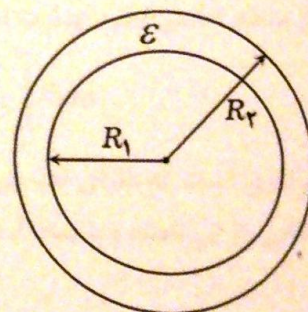
$$\left. \begin{aligned}
 C_2 &= \frac{C'_1 C'_2}{C'_1 + C'_2} \\
 C'_1 &= \epsilon_0 \frac{wx}{(d-t)}, C'_2 = k \epsilon_0 \frac{wx}{t}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_2 = \frac{k \epsilon_0 wx}{kd + (1-k)t}$$

$$C_{\text{total}} = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \frac{w(L-x)}{d} + \frac{k \epsilon_0 wx}{kd + (1-k)t}$$

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta \phi)^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon_0 w(L-x)}{d} + \frac{k \epsilon_0 wx}{kd + (1-k)t} \right] (\Delta \phi)^2$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} (\Delta \phi)^2 \epsilon_0 w \left[\frac{-1}{d} + \frac{k}{kd + (1-k)t} \right]$$

۶-۲۶ - سیم استوانه‌ای طولی به شعاع R_1 ، توسط یک پوسته استوانه‌ای بلند به شعاع R_2 ($R_2 > R_1$) به طور هم محور احاطه شده است. این دو رسانا "صفحات" یک خازن را تشکیل می‌دهند و فضای بین آنها توسط ماده نارسنایی با گذردهی ϵ پر شده است. (الف) ظرفیت در واحد طول این خازن را به دست آورید. (ب) نشان دهید که این نتیجه تنها به نسبت R_2/R_1 بستگی دارد.



حل: الف) با محاسبه انرژی کل موجود در حجم محبوس بین دو استوانه و

$$\text{مقایسه آن با } U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \text{، ظرفیت خازن را بدست می‌آوریم:}$$

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon r} \hat{r}_0$$